Ein Zugang zum klassischen Partitionenproblem über Modulformen von negativem Gewicht nach Petersson

Raphael Richter

21. November 2000

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Grundlegende Probleme im Bereich der additiven analytischen Zahlentheorie sind die sogenannten *Partitionenprobleme*. Untersucht wird dabei – zu einer gegebenen positiven ganzen Zahl n – die Anzahl $p^*(n)$ der verschiedenen *Partitionen* oder *Zerlegungen* von n. Hierbei ist eine *Partition von n* eine Darstellung von n als Summe von positiven ganzen Zahlen, welche gewissen Einschränkungen unterliegen.
Der Zusammenhang zwischen den Partitionenproblemen und den Modulformen von negativem Gewicht besteht nun darin, daß viele dieser Partitionenanzahlen $p^*(n)$ als Fourierkoeffizienten von Modulformen von negativem Gewicht auftreten.
Im Fall des *klassischen Partitionenproblems*, des Problems, die Anzahl $p(n)$ der uneingeschränkten Partitionen von n zu berechnen, führt dies auf die 1877 von R. Dedekind eingeführte Funktion

$$\eta(\tau) := e^{\frac{\pi i}{12}\tau} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i m\tau}),$$

welche auf $\mathbb{H}$ holomorph und von Null verschieden ist.
Die Funktion η^{-1} erweist sich als auf $\mathbb{H}$ holomorphe Modulform zur vollen Modulgruppe vom Gewicht $-\frac{1}{2}$ zu einem gewissen Multiplikatorsystem v_η^{-1}. Sie besitzt eine Fourierentwicklung der Form

$$\eta^{-1}(\tau) = e^{-\frac{\pi i\tau}{12}} + \sum_{n=1}^{\infty} p(n) e^{2\pi i(n-\frac{1}{24})\tau} \quad (\tau \in \mathbb{H}).$$

Gründend auf den funktionalen Eigenschaften von η^{-1} erhielten G. H. Hardy und S. Ramanujan im Jahre 1917 aus der obigen Darstellung zunächst asymptotische Formeln für die Funktion $p(n)$ (vgl. [5], S. 75-115). Später, im Jahre 1937, konnte H. Rademacher die Funktion $p(n)$ in Form einer absolut konvergenten Reihe exakt darstellen (vgl. [16], S. 251).
All diese Ergebnisse beruhten auf der Anwendung der sogenannten Farey-dissection auf den Integrationsweg in der Integraldarstellung der Fourierkoeffizienten von η^{-1}.
Ebenfalls unter Zuhilfenahme dieser Methode wurden in den Jahren 1938-40 dann auch die Fourierkoeffizienten beliebiger Modulformen von negativem Gewicht von H. Rademacher und H. S. Zuckerman (s. [19] und [23]) bestimmt.
In diesen Abhandlungen wurde allerdings vorausgesetzt, daß die betrachtete Modulform in einem Fundamentalbereich der Modulgruppe bis auf Pole erster Ordnung in seinem Innern holomorph ist, d.h. insbesondere in den elliptischen Fixpunkten der Modulgruppe waren keine Pole zugelassen.
In der vorliegenden Arbeit soll eine Methode zur Konstruktion von Modulformen beliebigen negativen Gewichts zur vollen Modulgruppe, welche Pole höchstens erster Ordnung in Punkten innerhalb eines Fundamentalbereichs der Modulgruppe und in den elliptischen Fixpunkten $\rho := e^{\frac{2\pi i}{3}}$ und i der Modulgruppe besitzen, vorgestellt werden.
Die Ausführungen orientieren sich im wesentlichen an dem Artikel [13] von H. Petersson aus dem Jahre 1950.

Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer solchen Modulform gegeben werden, welche in Beziehung stehen zu dem Vektorraum der Spitzenformen vom Gewicht $r > 2$.
Schließlich wird im Falle ihrer Existenz die vollständige Bestimmung der Fourierkoeffizienten einer solchen Form von negativem Gewicht stattfinden.
Diese Ergebnisse bilden nun einen anderen Zugang zum klassischen Partitionenproblem als den von RADEMACHER, indem man mit ihnen die Partitionenanzahl ohne Zuhilfenahme der FAREY-dissection bestimmt.

Das erste Kapitel faßt grundlegende Bezeichnungen und Aussagen zur Modulgruppe, zur DEDEKINDschen Eta-Funktion und zu den für die Darstellung der Fourierkoeffizienten notwendigen Bessel-Funktionen zusammen.

Inhalt des zweiten Kapitels ist die eingehende Untersuchung der Systeme von Multiplikatoren vom Betrag 1, welche in der Transformationsformel der Modulformen von nicht-ganzem Gewicht auftreten.

Die Definition und die elementaren Eigenschaften der Modulformen von beliebigem reellen Gewicht zur vollen Modulgruppe sind Thema des dritten Kapitels dieser Arbeit.

Die Kapitel IV und V beschäftigen sich mit den auf der oberen Halbebene holomorphen Modulformen vom Gewicht $r > 2$. Zunächst erfolgt die Einführung der sogenannten POINCARÉschen Reihen vom Gewicht $r > 2$ zur Modulgruppe, ihr Konvergenznachweis (Satz IV.1.3) und eine vollständige Bestimmung ihrer Fourierkoeffizienten (Satz IV.2.4). Anschließend werden die Vektorräume der ganzen Modulformen und der Spitzenformen vom Gewicht $r > 2$ untersucht, die Endlichkeit ihrer Dimension nachgewiesen und jeweils eine Basis dieser Vektorräume aus gewissen der POINCARÉschen Reihen angegeben.

Die Konstruktion der Modulformen von negativem Gewicht zeigt Analogien zur Partialbruchzerlegung im Bereich der rationalen Funktionen.
Grundelemente hierfür bilden die in Kapitel VI definierten *Partialbruchreihen* $H_r(\tau, v, z)$ für $r > 2$. Eine Untersuchung dieser Reihen als Funktionen von τ auf $\mathbb{H}$ bei festem $z \in \mathbb{H}$ und als Funktionen von z auf $\mathbb{H}$ bei festem $\tau \in \mathbb{H}$ zeigt, daß sie als Funktionen von $\tau \in \mathbb{H}$ Fourierkoeffizienten der Form $F_{2-r}(z, v^{-1}, m + \kappa)$ besitzen, welche für sich genommen auf $\mathbb{H}$ holomorphe Funktionen von z darstellen.
Der anschließende *Hauptsatz über Modulformen von negativem Gewicht* (Satz VI.2.4) beinhaltet notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, wann es sich bei einer Linearkombination aus Werten der Funktionen H_r an vorgegebenen Stellen $\tau = c_i$ $(i = 1, \ldots, K)$ in einem Fundamentalbereich der Modulgruppe und den Fourierkoeffizienten $F_{2-r}(z, v^{-1}, m + \kappa)$ für $r > 2$ um eine Modulform vom Gewicht $2 - r < 0$ zur Modulgruppe und zum Multiplikatorsystem v^{-1} handelt, welche an den Stellen c_i $(i = 1, \ldots, K)$ höchstens Pole erster Ordnung besitzt.
In diese Bedingungen gehen die Ergebnisse aus den Kapiteln IV und V ein.
Weiterhin gibt der *Hauptsatz* eine explizite Formel für die Fourierkoeffizienten der durch diese Linearkombination eindeutig bestimmten Modulform von negativem Gewicht. Diese lassen sich linear kombinieren aus den Werten gewisser POINCARÉscher Reihen

in den Punkten $\tau = c_i$ $(i = 1, \dots, K)$ und einigen ihrer Fourierkoeffizienten.

Im siebten Kapitel erfolgt dann die Anwendung eines Spezialfalles des Hauptsatzes aus Kapitel VI auf das klassische Partitionenproblem.
Bei der Modulform η^{-1}, deren Fourierkoeffizienten zu diesem Zweck bestimmt werden sollen, handelt es sich nämlich um eine Modulform vom Gewicht $-\frac{1}{2}$, welche auf $\mathbb{H}$ holomorph ist.
Es wird gezeigt, daß die 1937 von Rademacher entdeckte Formel für die Partitionenanzahl $p(n)$ mit derjenigen übereinstimmt, welche man aus dem Hauptsatz erhält, indem man aus der Fourierentwicklung der Funktion η^{-1} und aus ihrem Transformationsverhalten die Parameter des Problems bestimmt und einige Umformungen vornimmt.
Dieses letzte Kapitel schließt mit ergänzenden Aussagen über Modulformen von *halbzahligem negativen Gewicht* (d.h. vom Gewicht $-\frac{k}{2}$ mit $k \in \mathbb{N}$), welche auf der oberen Halbebene holomorph sind und mit einigen Konsequenzen, die sich daraus unter gewissen Voraussetzungen für die Fourierkoeffizienten spezieller Poincaréscher Reihen ergeben.

Mein herzlicher Dank gilt Herrn Prof. Dr. Heinrich Lang für die Einführung in das Arbeitsgebiet der analytischen Zahlentheorie und die freundliche Betreuung.

Kapitel I

Grundlagen

Inhalt dieses Kapitels ist die Einführung grundlegender Bezeichnungen, welche in dieser Arbeit benötigt werden. Im Hinblick auf die Modulgruppe und die DEDEKINDsche Eta-Funktion wird hierbei im wesentlichen auf die Literatur von T. M. APOSTOL und R. A. RANKIN (s. [2], [20]) zurückgegriffen. Die benötigten Aussagen über die Bessel-Funktionen stützen sich sämtlich auf die Ausführungen von G. N. WATSON (s. [22]). Zum genaueren Studium der Einzelheiten sei auf die angegebene Literatur verwiesen.

1 Die Modulgruppe

Die Menge aller **Möbius-Transformationen** der Form

$$S\tau := S(\tau) = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ und $ad - bc = 1$ heißt **Modulgruppe**. Diese Gruppe kann durch ganzzahlige 2×2-Matrizen dargestellt werden.
Die Gruppe

$${}_1\Gamma := \mathrm{SL}(2;\mathbb{Z}) := \{S = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \det S = 1\}$$

bildet bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe mit Einselement $E = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und heißt (homogene, rationale) **Modulgruppe**.
In fester Bezeichnung treten die folgenden Matrizen (bzw. Transformationen) auf:
Die Einheitsmatrix $E = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, die Translationsmatrizen $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $T^n = \left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ für $n \in \mathbb{Z}$ mit $T^n(\tau) = \tau + n$, die Inversionsmatrix $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ mit $J(\tau) = -\frac{1}{\tau}$ sowie $V := T^{-1}J = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
Die Modulgruppe ${}_1\Gamma$ wird von den Matrizen T und J bzw. $-V$ und J erzeugt.
(s. [2], S. 28 bzw. [8], S. 54/55).
Ein Punkt $\tau \in \mathbb{H}$ heißt **Fixpunkt** von ${}_1\Gamma$, falls ein $S \in {}_1\Gamma$ existiert mit $S\tau = \tau$. Von diesen Fixpunkten zeichnen sich die **elliptischen Fixpunkte** dadurch aus, daß sie Fixpunkte von Transformationen S mit $|\text{Spur } S| < 2$ sind.
Man unterscheidet zwei Arten von elliptischen Fixpunkten:

i) Die elliptischen Fixpunkte 2. Ordnung. Die zugehörige Matrix S ist in ${}_1\Gamma$ konjugiert zu $\pm J$, es gilt $S^2 = -E$, und die Menge dieser Fixpunkte wird beschrieben durch
$$\mathbb{E}_2 := \{\tau \in \mathbb{H} \mid \tau = Li,\ L \in {}_1\Gamma\}.$$

ii) Die elliptischen Fixpunkte 3. Ordnung. Die zugehörige Matrix S ist konjugiert zu $\pm V$ oder $\pm V^2$, es gilt $S^3 = -E$, und die Menge der Fixpunkte wird beschrieben durch
$$\mathbb{E}_3 := \{\tau \in \mathbb{H} \mid \tau = L\rho,\ L \in {}_1\Gamma\}.$$
Hierbei ist $\rho := e^{\frac{2\pi i}{3}}$. (s. [20], S. 45ff.)

Für $\zeta \in \mathbb{H}$ bezeichnen wir mit

$$ {}_1\Gamma_\zeta := \{S \in {}_1\Gamma \mid S\zeta = \zeta\} $$

die **Fixgruppe** von ζ. Es gilt

$$ \begin{aligned} {}_1\Gamma_{Li} &= < LJL^{-1} > \quad \text{und} \\ {}_1\Gamma_{L\rho} &= < LVL^{-1} >, \end{aligned} $$

d.h. jedem $\zeta \in \mathbb{E}_2 \cup \mathbb{E}_3$ entspricht eindeutig eine natürliche Zahl m (hier $m = 2, 3$), seine Ordnung, und eine Matrix W mit $W^m = -E$ und ${}_1\Gamma_\zeta =< W >$. Es gibt demnach genau $2m$ Matrizen $S \in {}_1\Gamma$ mit $S\zeta = \zeta$, von denen je zwei die gleiche Möbius-Transformation bestimmen.
Eine Teilmenge F von $\mathbb{H}$ heißt **Fundamentalbereich** einer Untergruppe Γ von ${}_1\Gamma$, falls zu jedem $\tau \in \mathbb{H}$ genau eine Transformation $S \in \Gamma$ existiert mit $S\tau \in F$.
Die Menge

$$ \mathfrak{F} := \{\tau \in \mathbb{H} \mid |\tau| \geq 1, -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}\tau < \frac{1}{2};\ -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}\tau \leq 0, \text{ falls } |\tau| = 1.\} $$

ist ein Fundamentalbereich von ${}_1\Gamma$.
(s. [2], S.32)

2 Die Dedekindsche η-Funktion

Die *η-Funktion* wurde im Jahre 1877 von R. Dedekind eingeführt (siehe [4], S. 281). Für $\tau \in \mathbb{H}$ ist die Dedekindsche η-Funktion definiert durch

$$ \eta(\tau) := e^{\frac{\pi i}{12}\tau} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n\tau}). $$

Die η-Funktion ist holomorph und nullstellenfrei auf $\mathbb{H}$, und mit $S = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in {}_1\Gamma$ gilt

$$ \eta(S\tau) = v_\eta(S)(c\tau + d)^{\frac{1}{2}}\eta(\tau) $$

mit

$$ v_\eta(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)) = e^{\pi i(\frac{a+d}{12c} + s(-d,c) - \frac{1}{4})} $$

für $c > 0$. Hierbei ist $s(h,k)$ für teilerfremde ganze Zahlen h, k mit $k > 0$ – die sogenannte Dedekindsche Summe – definiert durch

$$ s(h,k) = \sum_{r=1}^{k-1} (\frac{r}{k} - \frac{1}{2})(\frac{rh}{k} - [\frac{rh}{k}] - \frac{1}{2}). $$

Spezielle Werte von v_η sind $v_\eta(T) = e^{\frac{\pi i}{12}}$, $v_\eta(J) = e^{\frac{\pi i}{4}}$ und $v_\eta(V) = e^{\frac{\pi i}{6}}$.
(s. [2], S. 52ff. bzw. [17], S. 14-19)

3 Die Bessel-Funktionen

Die Bessel-Funktionen J_{r-1} und I_{r-1} sind für reelles $r > 1, u > 0$ definiert durch die absolut konvergenten Reihen

$$J_{r-1}(u) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\frac{1}{2}u)^{2m+r-1}}{m!\Gamma(m+r)}$$

und

$$I_{r-1}(u) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}u)^{2m+r-1}}{m!\Gamma(m+r)}.$$

(s. [22], S.40 (8) und S.77 (2))
Diese Funktionen besitzen die folgenden Darstellungen:

(i) Es gilt

$$J_{r-1}(u) = \frac{2(\frac{1}{2}u)^{r-1}}{\Gamma(r-\frac{1}{2})\sqrt{\pi}} \int_0^1 (1-t^2)^{r-\frac{3}{2}} \cos(ut)dt$$

und

$$I_{r-1}(u) = \frac{2(\frac{1}{2}u)^{r-1}}{\Gamma(r-\frac{1}{2})\sqrt{\pi}} \int_0^1 (1-t^2)^{r-\frac{3}{2}} \cosh(ut)dt.$$

(ii) Für beliebiges $c > 0$ gilt

$$J_{r-1}(u) = \frac{(\frac{1}{2}u)^{r-1}}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} w^{-r} \exp(w - \frac{u^2}{4w})dw$$

und

$$I_{r-1}(u) = \frac{(\frac{1}{2}u)^{r-1}}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} w^{-r} \exp(w + \frac{u^2}{4w})dw.$$

Hierbei wird im Integranden jeweils der auf $\mathbb{C}^-$ definierte Hauptwert der Potenz verwendet.

(s. [22], S.48 (2), 79 (9), 176 (1), 177 (8) und 181 (1))

Weiterhin sind für die Funktion $I_r(u)$ $(u, r > 0)$ folgende Aussagen richtig:

(a)

$$I_{\frac{1}{2}}(u) = \left(\frac{2}{\pi u}\right)^{\frac{1}{2}} \sinh u.$$

(b)

$$\frac{d}{udu}\left(\frac{I_r(u)}{u^r}\right) = \frac{I_{r+1}(u)}{u^{r+1}}.$$

Die Formel (a) findet man in [22], S.79 (6) für den Fall $m = 1$, und die Formel in (b) erhält man aus [22], S.80 (10) für $n = 0$.

Kapitel II

Multiplikatorsysteme zu ${}_1\Gamma$

In diesem Kapitel werden wir uns mit den Eigenschaften der Faktor- und Multiplikatorsysteme zu ${}_1\Gamma$ beschäftigen. Diese werden in entscheidendem Maße in die Kapitel III und IV eingehen, in denen wir uns der Untersuchung der Modulformen von beliebigem reellen Gewicht und im speziellen den POINCARÉschen Reihen vom Gewicht $r > 2$ zuwenden.

1 Faktorsysteme zu ${}_1\Gamma$

Zu $S = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in {}_1\Gamma$ und $\tau \in \mathbb{H}$ und $r \in \mathbb{R}$ definieren wir $(S : \tau) := (c\tau + d)$ und

$$(S : \tau)^r := \exp(r \log(c\tau + d))$$

mit dem Hauptzweig des Logarithmus $\log z = \log|z| + i \arg z$ $(-\pi < \arg z \leq \pi)$.
Durch die Festlegung

$$\arg(c\tau + d) = \begin{cases} \arg(\tau + \frac{d}{c}) + \frac{\pi}{2}(sgn\, c - 1) & \text{falls } c \neq 0 \\ \frac{\pi}{2}(1 - sgn\, d) & \text{falls } c = 0 \end{cases}$$

ist für $z = (c\tau + d)$ hierbei die Bedingung $-\pi < \arg z \leq \pi$ erfüllt. Auf die Beweise der folgenden Aussagen soll hier nicht näher eingegangen sondern auf [20], Kapitel 3 und [8], S.113-117 verwiesen werden.

1.1 Lemma

Für $M, S \in {}_1\Gamma$ und $\tau = x + iy \in \mathbb{H}$ gilt

(i) $\frac{d}{d\tau} M\tau = \frac{1}{(M:\tau)^2}$

(ii) $\operatorname{Im} M\tau = \frac{y}{|M:\tau|^2}$

(iii) $(M : S\tau)(S : \tau) = (MS : \tau)$,
d.h. $\log(M : S\tau) = \log(MS : \tau) - \log(S : \tau) + 2\pi i \cdot w(M, S)$ mit dem Hauptzweig des Logarithmus. Dabei ist $w(M, S)$ eine ganze Zahl in Abhängigkeit von S und der zweiten Zeile von M.

(iv) Es ist

$$w(M, S) = \frac{1}{2\pi}(\arg(M : S\tau) - \arg(MS : \tau) + \arg(S : \tau)) \in \{0, -1, 1\}.$$

(v) Ist $M = \begin{pmatrix} * & * \\ m_1 & m_2 \end{pmatrix}$ und $MS = \begin{pmatrix} * & * \\ m_1' & m_2' \end{pmatrix}$, so gilt

$$w(M,S) = \begin{cases} \frac{1}{4}(\operatorname{sgn} c + \operatorname{sgn} m_1 - \operatorname{sgn} m_1' - \operatorname{sgn}(m_1 c m_1')) & m_1 c m_1' \neq 0 \\ -\frac{1}{4}(1 - \operatorname{sgn} c)(1 - \operatorname{sgn} m_1) & c m_1 \neq 0,\ m_1' = 0 \\ \frac{1}{4}(1 + \operatorname{sgn} c)(1 - \operatorname{sgn} m_2) & c m_1' \neq 0,\ m_1 = 0 \\ \frac{1}{4}(1 - \operatorname{sgn} a)(1 + \operatorname{sgn} m_1) & m_1 m_1' \neq 0,\ c = 0 \\ \frac{1}{4}(1 - \operatorname{sgn} a)(1 - \operatorname{sgn} m_2) & c = m_1 = m_1' = 0. \end{cases}$$

Insbesondere folgt daraus $w(-E,S) = \frac{1+\operatorname{sgn} c}{2}$, $w(S,S^{-1}) = 0$ für $c \neq 0$ und $w(T^n,T^m) = 0$ für alle $m,n \in \mathbb{Z}$.

1.2 Definition (Faktorsystem)

Definiert man für festes $r \in \mathbb{R}$ und $M,S \in {}_1\Gamma$

$$\sigma(M,S) := e^{2\pi i r \cdot w(M,S)},$$

so erhält man nach Lemma 1.1 die Aussagen

(i) $(M : S\tau)^r = \sigma(M,S)\frac{(MS:\tau)^r}{(S:\tau)^r}$

(ii) $\sigma(M,S_1S_2)\sigma(S_1,S_2) = \sigma(MS_1,S_2)\sigma(M,S_1)$

(iii) $\sigma(S,S^{-1}) = \sigma(S^{-1},S)$, $\sigma(E,S) = \sigma(S,E) = 1$

für $M,S,S_1,S_2 \in {}_1\Gamma$.

Die Funktion $\sigma : {}_1\Gamma \times {}_1\Gamma \to \mathbb{C}$ wird **Faktorsystem** vom Gewicht r zur Gruppe ${}_1\Gamma$ genannt.

2 Multiplikatorsysteme zu ${}_1\Gamma$

2.1 Definition (Multiplikatorsystem)

Es sei $r \in \mathbb{R}$ gegeben. Eine Funktion $v : {}_1\Gamma \to \mathbb{C}$ heißt ein **Multiplikatorsystem** (kurz: MS) vom Gewicht r zur Gruppe ${}_1\Gamma$, falls gilt:

(i) $|v(S)| = 1$ für alle $S \in {}_1\Gamma$.

(ii) $v(-E)(-1)^r = 1$, d.h. $v(-E) = e^{-\pi i r}$.

(iii) $v(MS) = \sigma(M,S)v(M)v(S)$ für alle $M,S \in {}_1\Gamma$.

Demnach ist jedes MS vom Gewicht r zu ${}_1\Gamma$ auch stets ein MS vom Gewicht $r+2k$ $(k \in \mathbb{Z})$ zu ${}_1\Gamma$.
Ist r eine ganze Zahl mit $r \equiv 0 \mod 2$, so ist v ein gerader abelscher Charakter von ${}_1\Gamma$, d.h. $S \mapsto v(S)$ ist ein Homomorphismus von ${}_1\Gamma$ in die multiplikative Gruppe der komplexen Zahlen vom Betrag 1 mit $v(-S) = v(S)$.
Sind nun v_1 und v_2 zwei Multiplikatorsysteme zu ${}_1\Gamma$ von gleichem Gewicht $r \in \mathbb{R}$, dann ist $v_0 := \frac{v_1}{v_2}$ ein MS zu ${}_1\Gamma$ vom Gewicht 0, also ein gerader abelscher Charakter von ${}_1\Gamma$.
Man erhält folglich alle MS zu ${}_1\Gamma$ vom Gewicht r aus einem festen MS v_1 in der Form v_1v_0, wobei v_0 alle geraden abelschen Charaktere von ${}_1\Gamma$ durchläuft.
Ist $[{}_1\Gamma, {}_1\Gamma]$ die Untergruppe von ${}_1\Gamma$, welche von den Kommutatoren erzeugt wird, so weiß man aus der Algebra, daß die Faktorgruppe ${}_1\Gamma/[{}_1\Gamma, {}_1\Gamma]$ isomorph ist zur Gruppe der geraden abelschen Charaktere von ${}_1\Gamma$.
Die Anzahl der verschiedenen MS vom Gewicht $r \in \mathbb{R}$ entspricht also der Ordnung der Gruppe ${}_1\Gamma/[{}_1\Gamma, {}_1\Gamma]$, falls überhaupt ein MS vom Gewicht r existiert. Andernfalls gibt es kein MS vom Gewicht r zu ${}_1\Gamma$.
In III.4.2 werden wir zeigen, daß zu beliebigem Gewicht $r \in \mathbb{R}$ immer ein MS vom Gewicht r zu ${}_1\Gamma$ existiert, daher gibt es wegen $[{}_1\Gamma : [{}_1\Gamma, {}_1\Gamma]] = 6$ (vgl. [20], S.18, Theorem 1.3.2) genau 6 verschiedene MS vom Gewicht r zu ${}_1\Gamma$.
Im folgenden wollen wir diese MS genauer charakterisieren.

Ist v ein Multiplikatorsystem zu ${}_1\Gamma$ vom Gewicht r, so ist wegen ${}_1\Gamma = < -V, J >$ v eindeutig bestimmt durch die Werte $v(V)$ und $v(J)$. Hierbei sind $V = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ mit $V^3 = J^2 = -E$ die Erzeuger der Fixgruppen der elliptischen Fixpunkte $\rho := e^{\frac{2\pi i}{3}} \in \mathbb{E}_3$ bzw. $i \in \mathbb{E}_2$.
Aus Lemma 1.1 erhält man

$$w(J,J) = w(V^2,V) = -1 \quad \text{und} \quad w(V,V) = 0.$$

Damit gilt dann

$$\begin{aligned} v(-E) = e^{-\pi i r} &= \sigma(V^2,V)\sigma(V,V)(v(V))^3 \\ &= \sigma(J,J)(v(J))^2 \\ &= e^{-2\pi i r}(v(V))^3 \\ &= e^{-2\pi i r}(v(J))^2, \end{aligned}$$

woraus folgt, daß

$$\begin{aligned} v(V) &= e^{\frac{\pi i r}{3} + \frac{2\pi i}{3}a} \quad \text{und} \\ v(J) &= e^{\frac{\pi i r}{2} + \frac{2\pi i}{2}b} \end{aligned}$$

für gewisse $a \in \{0,1,2\}$ und $b \in \{0,1\}$ richtig ist.
Die sechs Wertepaare (a,b) bestimmen somit die Multiplikatorsysteme zu gegebenem Gewicht $r \in \mathbb{R}$ vollständig und eindeutig.

Wegen $TV = J$ mit $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ gilt

$$v(J) = \sigma(T,V)v(T)v(V) \overset{1.1}{=} v(T)v(V) = e^{2\pi i\kappa}v(V)$$

mit $0 \le \kappa < 1$ und $v(T) = e^{2\pi i\kappa}$.
Demnach existiert ein $n \in \mathbb{Z}$ mit

$$\frac{r}{12} = \kappa + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + n.$$

Ist r gegeben, so werden die Zahlen a und b eindeutig von κ bestimmt und umgekehrt κ von den Zahlen a und b.
Dies sieht man wie folgt ein:

(i) Sind (a_1, b_1) und (a_2, b_2) zwei Paare mit

$$\frac{r}{12} = \kappa + \frac{a_1}{3} + \frac{b_1}{2} + n_1 = \kappa + \frac{a_2}{3} + \frac{b_2}{2} + n_2,$$

so gilt

$$2a_1 + 3b_1 + 6(n_1 - n_2) = 2a_2 + 3b_2,$$

also $3(b_1 - b_2) \equiv 0 \mod 2$, woraus wegen $b_1, b_2 \in \{0, 1\}$ die Gleichheit von b_1 und b_2 folgt.

Dann gilt aber $a_1 - a_2 \equiv 0 \mod 3$. Dies impliziert wegen $a_1, a_2 \in \{0, 1, 2\}$ auch $a_1 = a_2$.

Es werden also a und b durch κ eindeutig bestimmt.

(ii) Sind $\kappa_1, \kappa_2 \in [0, 1[$ mit

$$\frac{r}{12} = \kappa_1 + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + n_1 = \kappa_2 + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + n_2,$$

so folgt $\kappa_1 - \kappa_2 = n_2 - n_1$, demnach

$$1 > |\kappa_1 - \kappa_2| = |n_2 - n_1|.$$

Es sind $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, also $n_1 = n_2$ und $\kappa_1 = \kappa_2$.

Demzufolge wird κ eindeutig von den Zahlen a und b bestimmt.

Ausgehend von diesen Aussagen über Multiplikatorsysteme zur Modulgruppe bezeichnen wir zu gegebenem $r \in \mathbb{R}$ im folgenden mit $v_{a,b}$ dasjenige Multiplikatorsystem vom Gewicht r zur Modulgruppe mit der Eigenschaft

$$v(V) = e^{\frac{\pi i r}{3} + \frac{2\pi i}{3}a}$$

und

$$v(J) = e^{\frac{\pi i r}{2} + \frac{2\pi i}{2}b}.$$

Sind nun $\zeta_1 = L\rho \in \mathbb{E}_3$, $\zeta_2 = Mi \in \mathbb{E}_2$ mit $L, M \in {}_1\Gamma$ zwei elliptische Fixpunkte der Modulgruppe, so werden die zugehörigen Fixgruppen von den Matrizen $W_1 = LVL^{-1}$ bzw. $W_2 = MJM^{-1}$ mit $W_1^3 = -E$ und $W_2^2 = -E$ erzeugt.
Ist $v = v_{a,b}$ nun ein MS vom Gewicht r zu ${}_1\Gamma$, und sind desweiteren $a_L \in \{0,1,2\}$ bzw. $b_M \in \{0,1\}$ festgelegt durch die Eigenschaften

$$\begin{aligned} v(W_1) &= e^{\frac{2\pi i}{3}a_L + \frac{\pi i r}{3}} \quad \text{und} \\ v(W_2) &= e^{\frac{2\pi i}{2}b_M + \frac{\pi i r}{2}}. \end{aligned}$$

Dann gilt $a_L = a$ und $b_M = b$.

Sind nämlich $U, S \in {}_1\Gamma$, $r \in \mathbb{R}$ und v ein MS vom Gewicht r zu ${}_1\Gamma$, dann gilt nach Lemma 1.1 (iii) und 1.2 (i)

$$\begin{aligned} (USU^{-1} : z)^r v(USU^{-1}) &= (US : U^{-1}z)^r v(US)(U^{-1} : z)^r v(U^{-1}) \\ &= (U : SU^{-1}z)^r v(U)(S : U^{-1}z)^r v(S)(U^{-1} : z)^r v(U^{-1}) \\ &= \frac{\overbrace{(E : SU^{-1}z)^r}^{=1}(S : U^{-1}z)^r v(S)(U^{-1} : z)^r v(U)}{v(U)(U^{-1} : USU^{-1}z)^r} \\ &= v(S)\frac{(S : U^{-1}z)^r (U^{-1} : z)^r}{(U^{-1} : USU^{-1}z)^r}. \end{aligned} \tag{1}$$

Setzt man nun $U = L$ (bzw. $U = M$) und $S = V$ $(S = J)$, so erhält man aus (1) wegen $W_1\zeta_1 = LVL^{-1}\zeta_1 = \zeta_1$ und $W_2\zeta_2 = MJM^{-1}\zeta_2 = \zeta_2$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} (W_1 : \zeta_1)^r v(W_1) &= v(V)(V : \rho)^r \quad \text{und} \\ (W_2 : \zeta_2)^r v(W_2) &= v(J)(J : i)^r. \end{aligned} \tag{2}$$

Nach Lemma 1.1. (iii) gilt

$$\begin{aligned} (L : V\rho)(V : \rho) &= (LV : \rho) = (LVL^{-1} : L\rho)(L : \rho) \quad \text{bzw.} \\ (M : Ji)(J : i) &= (MJ : i) = (MJM^{-1} : Mi)(M : i). \end{aligned} \tag{3}$$

Bei ρ und i handelt es sich um Fixpunkte von V bzw. J.
Zusammen mit $(V : \rho) = -\rho = e^{-\frac{\pi i}{3}}$ und $(J : i) = -i = e^{-\frac{\pi i}{2}}$ erhält man aus (3) die Identitäten

$$\begin{aligned} (W_1 : \zeta_1)^r &= (V : \rho)^r = e^{-\frac{\pi i r}{3}} \quad \text{und} \\ (W_2 : \zeta_2)^r &= (J : i)^r = e^{-\frac{\pi i r}{2}}, \end{aligned} \tag{4}$$

also

$$\begin{aligned} v(LVL^{-1}) &= v(V) = e^{\frac{2\pi i}{3}a + \frac{\pi i r}{3}} \quad \text{und} \\ v(MJM^{-1}) &= v(J) = e^{\frac{2\pi i}{2}b + \frac{\pi i r}{2}} \end{aligned} \tag{5}$$

wegen (2), und das gilt für beliebige $\zeta_1 = L\rho \in \mathbb{E}_3$, $\zeta_2 = Mi \in \mathbb{E}_2$.

Die Aussagen (4) und (5) ergeben zudem

$$\begin{aligned} v(W_1)(W_1:\zeta_1)^r &= e^{\frac{2\pi i}{3}a} \quad \text{und} \\ v(W_2)(W_2:\zeta_2)^r &= e^{\frac{2\pi i}{2}b}. \end{aligned} \tag{6}$$

Für weitere Aussagen bezüglich der MS zu ${}_1\Gamma$ werden sich einige Symmetrieeigenschaften der Modulgruppe als wichtig erweisen, zu denen wir im folgenden Lemma einige Ergebnisse zusammentragen wollen.

2.2 Lemma

Es seien $S = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, $\tilde{S} := \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ -c & d \end{smallmatrix}\right) = \tilde{I}S\tilde{I}$ mit $\tilde{I} = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $r \in \mathbb{R}$. Dann sind die folgenden Aussagen richtig:

(i) Die Abbildung $S \mapsto \tilde{S}$ ist ein Isomorphismus von ${}_1\Gamma$ auf sich.

(ii) $-\overline{S\tau} = \tilde{S}(-\overline{\tau})$ und $-\overline{\tilde{S}\tau} = S(-\overline{\tau})$.

(iii)

$$\lambda_0(S) := \frac{1}{2\pi}(\arg(S:-\overline{\tau}) + \arg(\tilde{S}:\tau)) = \begin{cases} 1 & \text{falls } c = 0 > d \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(iv) Es gilt $\overline{(S:-\overline{\tau})^r} = u_r(S)(\tilde{S}:\tau)^r$ und $\overline{(\tilde{S}:-\overline{\tau})^r} = u_r(\tilde{S})(S:\tau)^r$ mit

$$u_r(S) = e^{-2\pi i r \lambda_0(S)}.$$

(v) Für alle $M, S \in {}_1\Gamma$ ist

$$\sigma(\tilde{M}, \tilde{S}) = \frac{u_r(MS)}{u_r(M)u_r(S)}\overline{\sigma(M,S)}.$$

(vi) Ist v ein MS vom Gewicht r zu ${}_1\Gamma$ und wird $\tilde{v} : {}_1\Gamma \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\tilde{v}(S) := u_r(\tilde{S})\overline{v}(\tilde{S}),$$

so ist $\tilde{v}$ ein MS vom Gewicht r zu ${}_1\Gamma$ mit $\tilde{\tilde{v}} = v$.

(vii) Ist $S = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mit $c \neq 0$, so gilt

$$v(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)) = v(\left(\begin{smallmatrix} d & b \\ c & a \end{smallmatrix}\right)).$$

<u>Beweis:</u>

(i) Diese Aussage ist richtig wegen $\tilde{\tilde{S}} = S$ und $\widetilde{MS} = \tilde{M}\tilde{S}$.

(ii) Es ist

$$-\overline{S\tau} = -\frac{a\overline{\tau}+b}{c\overline{\tau}+d} = \frac{a(-\overline{\tau})-b}{-c(-\overline{\tau})+d} = \tilde{S}(-\overline{\tau})$$

und

$$-\overline{\tilde{S}\tau} = -\frac{a\overline{\tau}-b}{-c\overline{\tau}+d} = \frac{a(-\overline{\tau})+b}{c(-\overline{\tau})+d} = S(-\overline{\tau}).$$

(iii) Es sei $c \neq 0$. Dann gilt nach Lemma 1.1

$$\begin{aligned} 2\pi\lambda_0(S) &= \arg(-\overline{\tau}+\frac{d}{c}) + \frac{\pi}{2}(\operatorname{sgn} c - 1) + \arg(\tau - \frac{d}{c}) + \frac{\pi}{2}(-\operatorname{sgn} c - 1) \\ &= \arg(-\overline{\tau}+\frac{d}{c}) + \arg(\tau - \frac{d}{c}) - \pi \\ &= -\arg(-\tau+\frac{d}{c}) + \arg(\tau - \frac{d}{c}) - \pi \\ &= \pi - \arg(\tau - \frac{d}{c}) + \arg(\tau - \frac{d}{c}) - \pi = 0. \end{aligned}$$

Ist $c = 0$, so hat man

$$\lambda_0(S) = \frac{1}{\pi}\arg d \overset{1.1}{=} \frac{1}{2}(1 - \operatorname{sgn} d) = \begin{cases} 0 & \text{falls } d > 0 \\ 1 & \text{falls } d < 0. \end{cases}$$

(iv) folgt aus (iii) mit

$$(S : -\overline{\tau})^r = \exp(r \log(S : -\overline{\tau})),$$

wobei wiederum der Hauptzweig des Logarithmus verwendet wird.

(v) Nach 1.2 (i) und 2.2 (iv) gilt

$$\begin{aligned} \sigma(\tilde{M}, \tilde{S}) = \frac{(\tilde{M} : \tilde{S}\tau)^r}{(\tilde{M}\tilde{S} : \tau)^r}(\tilde{S} : \tau)^r &\overset{\text{(iv)}}{=} \frac{\overline{(S : -\overline{\tau})^r (M : S(-\overline{\tau}))^r} u_r(MS)}{u_r(S)\overline{(MS : -\overline{\tau})^r} u_r(M)} \\ &= \frac{u_r(MS)}{u_r(M)u_r(S)}\overline{\sigma(M,S)}. \end{aligned}$$

(vi) Es gilt

(α) $|\tilde{v}(S)| = |u_r(\tilde{S})\overline{v}(\tilde{S})| = 1$ für alle $S \in {}_1\Gamma$.

(β) $v(-E) = e^{-\pi i r}$, d.h. $\overline{v}(-\tilde{E}) = \overline{v}(-E) = e^{\pi i r}$.
Weiterhin ist $u_r(-E) = e^{-2\pi i r}$ nach (iii). Also

$$\tilde{v}(-E) = e^{-2\pi i r}e^{\pi i r} = e^{-\pi i r}.$$

(γ) Für alle $M, S \in {}_1\Gamma$ ist

$$\begin{aligned} \tilde{v}(MS) = u_r(\tilde{M}\tilde{S})\overline{v}(\tilde{M}\tilde{S}) &= u_r(MS)\overline{\sigma(\tilde{M},\tilde{S})v(\tilde{M})v(\tilde{S})} \\ &\overset{\text{(v)}}{=} \sigma(M,S)\frac{u_r(M)u_r(S)}{u_r(MS)}u_r(MS)\overline{v}(\tilde{M})\overline{v}(\tilde{S}) \\ &= \sigma(M,S)u_r(\tilde{M})u_r(\tilde{S})\overline{v}(\tilde{M})\overline{v}(\tilde{S}) \\ &= \sigma(M,S)\tilde{v}(M)\tilde{v}(S). \end{aligned}$$

Aus $(\alpha) - (\gamma)$ folgt, daß es sich bei $\tilde{v}$ um ein MS vom Gewicht r zu ${}_1\Gamma$ handelt.
Es gilt ${}_1\Gamma =< T, J >$ mit $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
Ist $v(T) = e^{2\pi i\kappa}$ mit einem $\kappa \in [0, 1[$, so ist

$$\tilde{v}(T) = \overline{v}(T^{-1}) = v(T) = e^{2\pi i\kappa}.$$

Nach Lemma 1.1 (iv) und 2.1 (ii) ist $v(J)^2 = v(-E)e^{2\pi ir} = e^{\pi ir}$, also

$$\tilde{v}(J) = \overline{v}(-J) = e^{\pi ir}\frac{1}{v(J)} = \frac{v(J)^2}{v(J)} = v(J),$$

denn $\sigma(-E, J) = 1$.
Die MS v und $\tilde{v}$ stimmen auf den Erzeugern T und J von ${}_1\Gamma$ überein, somit auf ganz ${}_1\Gamma$, d.h. es gilt $v = \tilde{v}$.

(vii) Ist $c \neq 0$, so ist $u_r(S) = 1,\ w(S, S^{-1}) = 0$ nach Lemma 1.1 (v).
Es gilt $v(S)v(S^{-1}) = 1$ und

$$v(\left(\begin{smallmatrix} d & b \\ c & a \end{smallmatrix}\right)) = v(\tilde{S}^{-1}) = \overline{v}(\tilde{S}) = \tilde{v}(S) \overset{\text{(vi)}}{=} v(S) = v(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)),$$

was die Behauptung war.

□

Kapitel III
Modulformen

Die Einführung des Begriffs der Modulform, die Untersuchung ihres Transformationsverhaltens bezüglich der Elemente der Modulgruppe sowie ihrer Entwicklungen und ihrer Ordnung in den Punkten aus $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$ sind Thema dieses Kapitels.

1 Uneingeschränkte Modulformen

Wir betrachten zunächst nur diejenigen Funktionen $f : \mathbb{H} \to \hat{\mathbb{C}}$, welche meromorph auf $\mathbb{H}$ sind und gewisse Transformationseigenschaften besitzen.

1.1 Definition

Eine Funktion $f : \mathbb{H} \to \hat{\mathbb{C}}$ heißt **uneingeschränkte Modulform** vom Gewicht[1] $r \in \mathbb{R}$ zur Gruppe ${}_1\Gamma$ und zum MS v, falls gilt:

(i) f ist meromorph auf $\mathbb{H}$ und

(ii) $f(L\tau) = (L : \tau)^r v(L) f(\tau)$ für alle $L \in {}_1\Gamma, \tau \in \mathbb{H}$.

Die Menge der uneingeschränkten Modulformen vom Gewicht r zur Gruppe ${}_1\Gamma$ mit Multiplikatorsystem v wird mit $\mathbb{M}'({}_1\Gamma, r, v)$ bezeichnet.
Ist $f \in \mathbb{M}'({}_1\Gamma, r, v)$, so definiert man f_L für $L \in {}_1\Gamma$ durch

$$f_L(\tau) := f|_L(\tau) := f(\tau)|_L := (L : \tau)^{-r} f(L\tau)$$

für $\tau \in \mathbb{H}$.

1.2 Satz

Ist $f \in \mathbb{M}'({}_1\Gamma, r, v)$ und so sind folgende Aussagen richtig:

(i) Sind $M, L \in {}_1\Gamma$, so ist

$$\begin{aligned} f_{ML} &= \sigma(M, L) v(M) f_L \\ f_M &= v(M) f \\ f_{(-L)} &= e^{\pm \pi i r} f_L. \end{aligned}$$

(ii) Es gilt

$$f_L(\tau + 1) = f_L(T\tau) = e^{2\pi i \kappa} f_L(\tau)$$

für alle $L \in {}_1\Gamma$, wobei $\kappa \in [0, 1[$ durch $v(T) = e^{2\pi i \kappa}$ bestimmt ist.

[1] Mit der Bezeichnung *Gewicht* richten wir uns nach Ogg (s. [10], S. 9). In der Literatur findet man häufiger die Bezeichnung *Dimension* $-r$ (statt *Gewicht* r), dies läßt aber Verwechslungen mit dem Begriff der Dimension eines Vektorraums zu, welche hier vermieden werden sollen.

<u>BEWEIS:</u>

(i) Dies folgt aus 1.1 (ii) und II.1.2 (i), da

$$\begin{aligned} f_{ML} &= (ML:\tau)^{-r} f(ML\tau) = v(M)(ML:\tau)^{-r} f(L\tau)(M:\tau)^r \\ &= v(M) \underbrace{\frac{(L:\tau)^r (M:\tau)^r}{(ML:\tau)^r}}_{=\sigma(M,L)} \underbrace{(L:\tau)^{-r} f(L\tau)}_{=f_L(\tau)} \\ &= v(M)\sigma(M,L) f_L(\tau) \end{aligned}$$

Daraus erhält man wegen $\sigma(M,E) = 1$, $f_E = f$, $\sigma(-E,L) \in \{e^{2\pi i r}, 1\}$, und $v(-E) = e^{-\pi i r}$ nach II.1.1, 1.2 und 2.1 die Aussagen

$$\begin{aligned} f_M &= v(M) f \\ f_{(-L)} &= e^{\pm \pi i r} f_L. \end{aligned}$$

(ii) Ist $v(T) = e^{2\pi i \kappa}$ mit $\kappa \in [0,1[$, so gilt

$$\begin{aligned} f_L(T\tau) &= (L:T\tau)^{-r} f(LT\tau) \\ &= (LT:\tau)^r v(LT)(L:T\tau)^{-r} f(\tau) \\ &= \sigma(L,T) v(L) v(T)(LT:\tau)^r (L:T\tau)^{-r} f(\tau) \\ &= e^{2\pi i \kappa} f_L(\tau). \end{aligned}$$

□

2 Modulformen

Die zusätzliche Bedingung, die nun an eine Modulform gestellt werden soll, beruht auf folgender Betrachtung.
Ist $f \in \mathbb{M}'({}_1\Gamma, r, v)$, und schreibt man

$$f^*(\tau) := e^{-2\pi i \kappa \tau} f(\tau),$$

so folgt aus Satz 1.2 (ii)

$$f^*(\tau + 1) = f^*(\tau).$$

Mit $t := e^{2\pi i \tau}$ setzt man nun $f^*(\tau) = F(t)$.
Damit ist F eindeutig definiert für $0 < |t| < 1$ und eine meromorphe Funktion von t in einer punktierten Umgebung des Ursprungs.
Ist nun f holomorph auf $\{\tau \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im}\tau > \eta\}$ für ein $\eta \geq 0$, so ist F holomorph auf $\{t \mid 0 < |t| < e^{-2\pi\eta}\}$ und besitzt eine konvergente Laurentreihenentwicklung der Form

$$F(t) = \sum_{n=N}^{\infty} b_n(F) t^n$$

mit einem $N \in \mathbb{Z}$ auf dieser punktierten Umgebung des Ursprungs.

2.1 Definition (Modulform)

Eine Funktion $f : \mathbb{H} \to \hat{\mathbb{C}}$ heißt nun **Modulform** vom Gewicht $r \in \mathbb{R}$ zu ${}_1\Gamma$ und zum Multiplikatorsystem v, falls f folgende Eigenschaften erfüllt:

(M1) f ist meromorph auf $\mathbb{H}$.

(M2) Für alle $L \in {}_1\Gamma$ gilt $f(L\tau) = (L : \tau)^r v(L) f(\tau)$.

(M3) Es existiert ein $\eta \geq 0$, so daß f auf $\{\tau \in \mathbb{H} \mid \operatorname{Im} \tau > \eta\}$ eine konvergente Fourierreihenentwicklung der Form

$$f(\tau) = \sum_{n=N}^{\infty} b_{n+\kappa}(f) e^{2\pi i (n+\kappa)\tau}$$

mit einem $N \in \mathbb{Z}$ und mit $v(T) = e^{2\pi i \kappa}$, $\kappa \in [0, 1[$ besitzt.

Die Darstellung in (M3) wird auch die Fourierreihenentwicklung von f in ∞ genannt. f heißt **ganze Modulform** vom Gewicht $r \in \mathbb{R}$ zu ${}_1\Gamma$ und zum MS v, falls gilt:

(G1) f ist in $\mathbb{H}$ holomorph.

(G2) Für alle $L \in {}_1\Gamma, \tau \in \mathbb{H}$ gilt $f(L\tau) = (L : \tau)^r v(L) f(\tau)$.

(G3) Es gilt (M3) mit $N + \kappa \geq 0$.

Sei f eine ganze Modulform vom Gewicht $r \in \mathbb{R}$ zu ${}_1\Gamma$ und zum MS v. Dann heißt f **(ganze) Spitzenform**, falls in (G3) zusätzlich $N + \kappa > 0$ gilt.
Es werden die Bezeichnungen

$$\begin{aligned}
\mathbb{M}({}_1\Gamma, r, v) &= \{f \mid f \text{ Modulform v. Gewicht } r \text{ und MS } v \text{ zu } {}_1\Gamma\} \\
\mathbb{H}({}_1\Gamma, r, v) &= \{f \mid f \in \mathbb{M}({}_1\Gamma, r, v),\ f \text{ hol. auf } \mathbb{H}\} \\
\mathbb{G}({}_1\Gamma, r, v) &= \{f \mid f \in \mathbb{H}({}_1\Gamma, r, v) \text{ und ganze Modulform}\} \\
SS({}_1\Gamma, r, v) &= \{f \mid f \in \mathbb{G}({}_1\Gamma, r, v) \text{ und (ganze) Spitzenform}\}
\end{aligned}$$

verwendet.

$$SS({}_1\Gamma, r, v) \subseteq \mathbb{G}({}_1\Gamma, r, v) \subseteq \mathbb{H}({}_1\Gamma, r, v) \subseteq \mathbb{M}({}_1\Gamma, r, v)$$

sind Vektorräume, von denen die ersten beiden endliche Dimension haben. Dies werden wir in Kapitel V dieser Arbeit beweisen.
Wie man an der Darstellung (G3) der ganzen Modulformen abliest, kann nur für $\kappa = 0$ der Fall $SS({}_1\Gamma, r, v) \neq \mathbb{G}({}_1\Gamma, r, v)$ eintreten.

Im weiteren wollen wir uns den Entwicklungen der auf $\mathbb{H}$ holomorphen Modulformen in den Punkten aus $\mathbb{H} \cup \{\infty\}$ zuwenden und den Begriff der Ordnung in diesen Punkten einführen. Hierbei wird auf die Ergebnisse und Bezeichnungen in [8] zurückgegriffen.

3 Ordnung und Entwicklungen von Modulformen

Betrachtet man eine Funktion $f \in \mathbb{H}({}_1\Gamma, r, v)$ mit $v = v_{a,b}$, so hat sie im Unendlichen nach (M3) eine Fourier-Entwicklung der Form

$$f(\tau) = \sum_{n=N}^{\infty} b_{n+\kappa}(f) e^{2\pi i(n+\kappa)\tau} \tag{1}$$

mit einem $N \in \mathbb{Z}$. Ferner hat f in den Punkten $\zeta \in \mathbb{H}$, welche nicht mit den elliptischen Fixpunkten von ${}_1\Gamma$ zusammenfallen, jeweils Entwicklungen der Form

$$f(\tau) = \sum_{n=N_\zeta}^{\infty} c_n(f)(\tau - \zeta)^n \tag{2}$$

mit einem $N_\zeta \geq 0$.
In den elliptischen Fixpunkten $\zeta_0 = L\rho \in \mathbb{E}_3$ bzw. $\zeta_0 = Li \in \mathbb{E}_2$ besitzt f Entwicklungen der Form

$$f(\tau) = (\tau - \overline{\zeta_0})^{-r} \sum_{n=N_{\zeta_0}}^{\infty} d_{n+\frac{a}{3}} \left(\left(\frac{\tau - \zeta_0}{\tau - \overline{\zeta_0}} \right)^2 \right)^{n+\frac{a}{3}} \tag{3}$$

für $\zeta_0 = L\rho$ mit einem $N_{\zeta_0} \geq 0$ bzw.

$$f(\tau) = (\tau - \overline{\zeta_0})^{-r} \sum_{n=N_{\zeta_0}}^{\infty} d_{n+\frac{b}{2}} \left(\left(\frac{\tau - \zeta_0}{\tau - \overline{\zeta_0}} \right)^3 \right)^{n+\frac{b}{2}} \tag{4}$$

für $\zeta_0 = Li$ mit einem $N_{\zeta_0} \geq 0$.
(vgl. [8], S.119-121).

3.1 Definition (Ordnung)

Man definiert die **Ordnung** von $f \in \mathbb{H}({}_1\Gamma, r, v)$ in den Punkten $\zeta \in \mathbb{H} \cup \{\infty\}$ (möglicherweise gebrochen-rational) durch

$$\operatorname{ord}(f, \zeta) = \begin{cases} N + \kappa & (1) \\ N_\zeta & (2) \\ N_\zeta + \frac{a}{3} & (3) \\ N_\zeta + \frac{b}{2} & (4), \end{cases}$$

je nachdem, ob f für $\zeta \in \mathbb{H} \cup \{\infty\}$ eine Entwicklung der Form (1) – (4) besitzt.

Ist $f \in \mathbb{G}({}_1\Gamma, r, v)$ und

$$\nu(f) := \sum_{\zeta \in {}_1\Gamma / \mathbb{H}} \operatorname{ord}(f, \zeta),$$

so erhält man $\nu(f) \geq \kappa + \frac{a}{3} + \frac{b}{2}$.

4 Beispiele

An dieser Stelle werden zunächst ein paar Beispiele für holomorphe Modulformen und deren Eigenschaften gegeben, auf welche im Verlauf der Arbeit noch näher eingegangen wird.
Für $\tau \in \mathbb{H}$ werden definiert

$$\begin{aligned}
g_2(\tau) &:= 60 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m\tau+n)^4}, \\
g_3(\tau) &:= 140 \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \frac{1}{(m\tau+n)^6}, \\
\Delta(\tau) &:= g_2^3(\tau) - 27 g_3^2(\tau) = (2\pi)^{12}\eta^{24}(\tau) \quad \text{und} \\
J(\tau) &:= \frac{g_2^3}{\Delta(\tau)} = 12^{-3} J_0(\tau).
\end{aligned}$$

Hierbei ist $\eta(\tau)$ die in I.2 eingeführte DEDEKINDsche Eta-Funktion. Zu den Beweisen der nun folgenden Aussagen, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll, wurde im wesentlichen das Buch von T. M. APOSTOL ([2]) herangezogen.

4.1 Satz

Es gilt

a) Die η-Funktion hat in ∞ eine Fourierentwicklung der Form

$$\begin{aligned}
\eta(\tau) &= e^{\frac{\pi i \tau}{12}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m e^{\pi i m(3m+1)\tau} \\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m e^{2\pi i \tau(\frac{3}{2}m^2 + \frac{m}{2} + \frac{1}{24})} \\
&= \sum_{n+\frac{1}{24}>0} b_{n+\frac{1}{24}}(\eta) e^{2\pi i (n+\frac{1}{24})\tau}
\end{aligned}$$

mit gewissen $b_{n+\frac{1}{24}}(\eta)$. Zusammen mit den Aussagen aus I.2 folgt daraus, daß es sich bei η um eine ganze Spitzenform vom Gewicht $\frac{1}{2}$ zur Modulgruppe und zum MS v_η ($= v_{0,0}$ in den Bezeichnungen von II.2.1) handelt.

b) Es gilt

$$\begin{aligned}
g_2(\tau) &= \frac{4\pi^4}{3}(1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) e^{2\pi i n\tau}) \quad \text{und} \\
g_3(\tau) &= \frac{8\pi^6}{27}(1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) e^{2\pi i n\tau})
\end{aligned}$$

mit
$$\sigma_\alpha(n) = \sum_{d|n,\, d>0} d^\alpha.$$

Weiterhin ist

$$\begin{aligned}
\Delta(\tau) &= (2\pi)^{12} \sum_{n=1}^{\infty} b_n(\Delta) e^{2\pi i n\tau} \quad \text{und} \\
J_0(\tau) &= 12^3 J(\tau) = e^{-2\pi i\tau} + 744 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(J_0) e^{2\pi i n\tau}
\end{aligned}$$

mit $b_n(\Delta), b_n(J_0) \in \mathbb{Z}$ für $n \geq 1$.

Spezielle Werte von J_0 sind $J_0(\rho) = 0$ und $J_0(i) = 12^3$.

c) Bei den Funktionen aus b) handelt es sich um auf $\mathbb{H}$ holomorphe Modulformen zu ${}_1\Gamma$ und zum MS $v \equiv 1$, und zwar sind

$$\begin{array}{ll}
g_2(\tau) \in \mathbb{G}({}_1\Gamma, 4, 1), & g_3(\tau) \in \mathbb{G}({}_1\Gamma, 6, 1), \\
\Delta(\tau) \in SS({}_1\Gamma, 12, 1), & J_0(\tau) \in \mathbb{H}({}_1\Gamma, 0, 1).
\end{array}$$

(s. [2], S.17, 51)

d) In den Bezeichnungen von 3.1 ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{ord}(\Delta, \infty) &= 1, \\
\operatorname{ord}(g_2, \rho) &= \frac{1}{3}, \\
\operatorname{ord}(g_3, i) &= \frac{1}{2}, \\
\operatorname{ord}(J_0, \infty) &= -1, \\
\operatorname{ord}(J_0, \rho) &= 1 \quad \text{und} \\
\operatorname{ord}(J_0 - 12^3, i) &= 1.
\end{aligned}$$

e) Jedes Polynom in J_0 mit komplexen Koeffizienten ist ein Element von $\mathbb{H}({}_1\Gamma, 0, 1)$, und umgekehrt gibt es zu jedem $f \in \mathbb{H}({}_1\Gamma, 0, 1)$ ein $P \in \mathbb{C}[X]$ mit $f = P(J_0)$, d.h.
$$\mathbb{H}({}_1\Gamma, 0, 1) = \mathbb{C}[J_0].$$

<u>BEWEIS:</u>

a) Die Reihenentwicklung findet man als Folgerung aus der EULERschen Identität

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m x^{m(3m+1)/2}$$

(s. [6], S. 37 und 45).

b) s. [2], S. 20f.

c) Dies folgt aus b) in Verbindung mit den Aussagen in [2], S. 17 und 51.

d) Die Aussagen über die Ordnungen von Δ und J_0 im Unendlichen liest man an den Darstellungen in b) ab.
Ist v das MS mit $v(L) = 1$ für alle $L \in {}_1\Gamma$, so gilt in den Bezeichnungen von II.2.1

$$v = \begin{cases} v_{1,0}, & \text{falls } r = 4, \\ v_{0,1}, & \text{falls } r = 6, \\ v_{0,0}, & \text{falls } r = 0. \end{cases}$$

Die Ordnung in den Punkten ρ und i errechnet man nun unter Zuhilfenahme der Aussagen über die Nullstellen der Funktionen g_2, g_3, J_0 und J in [2], S. 39f.

e) s. [2], S. 40, Theorem 2.8.

□

4.2 Bemerkung

Mit der η-Funktion ist auch die Funktion Δ auf $\mathbb{H}$ nullstellenfrei und holomorph, besitzt also einen eindeutig bestimmten Logarithmus $\log \Delta$ auf $\mathbb{H}$.
Daher ist für $s \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$\Delta^s(\tau) := (2\pi)^{12s} e^{2\pi i s\tau} \left(\prod_{n=1}^{\infty}(1-e^{2\pi i n\tau})\right)^{24s}$$

auf $\mathbb{H}$ wohldefiniert und eine eindeutige Potenz der Funktion Δ aus 4.
Wegen

$$\Delta(S\tau) = (S:\tau)^{12}\Delta(\tau)$$

gilt für alle $r \in \mathbb{R}$ und $S \in {}_1\Gamma$

$$\Delta^{\frac{r}{12}}(\tau) = v_0(S)(S:\tau)^r \Delta^{\frac{r}{12}}(\tau)$$

mit einem gewissen MS v_0 zu ${}_1\Gamma$ vom Gewicht r, d.h. zu jedem $r \in \mathbb{R}$ existiert ein MS vom Gewicht r zu ${}_1\Gamma$, was nun nach II.2.1 bestätigt, daß es zu jedem $r \in \mathbb{R}$ genau sechs MS vom Gewicht r zu ${}_1\Gamma$ gibt.

Kapitel IV
Poincarésche Reihen

In diesem Kapitel werden spezielle Modulformen vom Gewicht $r > 2$ zur Modulgruppe in Form von unendlichen Reihen, die sogenannten POINCARÉschen Reihen, eingeführt und deren Fourierkoeffizienten im Unendlichen explizit bestimmt.

1 Poincarésche Reihen

Für den Konvergenznachweis der speziellen Reihen, welche in 1.2 und 2.2 definiert werden, benötigen wir zunächst einige allgemeine Konvergenzaussagen über Reihen der Form

$$\sum_{\substack{(\mu,\nu)\in\mathbb{Z}^2\\ \mu\neq 0}} f_{\mu,\nu}(\tau)$$

für $\tau \in \mathbb{H}$.

1.1 Satz

Sei $\alpha \geq 0$, $r \in \mathbb{R}$, $r > 2$, und es sei für alle $(\mu,\nu) \in \mathbb{Z}^2$, $\mu \neq 0$ eine Funktion $f_{\mu,\nu} : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ definiert mit der Eigenschaft

$$|f_{\mu,\nu}(\tau)| \leq \exp\left(\frac{\alpha y}{|\mu\tau+\nu|^2}\right)$$

für alle $\tau \in \mathbb{H}$ mit $y = \operatorname{Im}\tau$. Dann konvergiert die Reihe

$$F(\tau) := \sum_{\substack{(\mu,\nu)\in\mathbb{Z}^2\\ \mu\neq 0}} \frac{f_{\mu,\nu}(\tau)}{|\mu\tau+\nu|^r}$$

für jedes $\tau \in \mathbb{H}$ absolut und auf $\mathbb{H}$ kompakt gleichmäßig absolut.
Insbesondere existiert zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\beta > 0$ in Abhängigkeit von α, r und ϵ, so daß

$$|F(\tau)| \leq \beta \cdot e^{\alpha/|\tau|}(|\tau|^{-r} + |\tau|^{-\frac{1}{2}r})$$

für alle $\tau \in W_\epsilon := \{\tau \in \mathbb{H} \mid \epsilon \leq \arg\tau \leq \pi - \epsilon\}$ gilt.

<u>BEWEIS:</u>

Es reicht zu zeigen, daß

$$G(\tau) := \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \frac{\exp(\alpha y \cdot |\mu\tau+\nu|^{-2})}{|\mu\tau+\nu|^r}$$

kompakt gleichmäßig auf $\mathbb{H}$ konvergiert.

Es sei also $\tau = r_0 \cdot e^{i\theta}$ mit $r_0 > 0$ und $\theta = \arg\tau$. Ferner seien $0 < \epsilon < \frac{\pi}{2}$ und $\tau \in W_\epsilon$, so daß $\epsilon \leq \theta \leq \pi - \epsilon$.
Dann ist für $\mu > 0$ und $\nu \neq 0$:

$$\begin{aligned} |\mu\tau + \nu|^2 &= \mu^2 r_0^2 + 2\mu\nu r_0 \cos\theta + \nu^2 \\ &= (\mu r_0 + \nu)^2 \cos^2\frac{\theta}{2} + (\mu r_0 - \nu)^2 \sin^2\frac{\theta}{2} \\ &\geq (\mu r_0 + |\nu|)^2 \sin^2\frac{\epsilon}{2} \\ &\geq 4\mu|\nu| r_0 \sin^2\frac{\epsilon}{2} > 0. \end{aligned}$$

Mit $C := 4\sin^2\frac{\epsilon}{2}$ hat man dann, da $y \leq r_0$ gilt,

$$\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=-N}^{N} \frac{\exp(\alpha y \cdot |\mu\tau+\nu|^{-2})}{|\mu\tau+\nu|^r} \leq \frac{e^{\alpha/r_0}}{r_0^r}\sum_{\mu=1}^{N}\mu^{-r} + 2\sum_{\mu=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{N}\frac{e^{\alpha/C}}{(C\mu\nu r_0)^{\frac{r}{2}}}$$

$$\leq e^{\alpha/r_0}\zeta(r) r_0^{-r} + 2e^{\alpha/C}\zeta^2(\frac{r}{2})(Cr_0)^{-\frac{r}{2}}$$

für jedes $N \geq 1$, wobei

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \quad (\mathrm{Re}\, s > 1)$$

die RIEMANNsche ζ-Funktion ist.
Es konvergiert also $G(\tau)$ auf W_ϵ.
Setzt man

$$\beta := \max\{\zeta(r), 2e^{\alpha/C}\zeta^2(\frac{r}{2})C^{-\frac{r}{2}}\},$$

so gilt

$$|G(\tau)| \leq \beta \cdot e^{\alpha/|\tau|}(|\tau|^{-r} + |\tau|^{-\frac{r}{2}}) \quad (\tau \in W_\epsilon).$$

Ist nun $K \subset \mathbb{H}$ kompakt, so existiert ein $\epsilon < \frac{\pi}{2}$ mit

$$K \subset B_\epsilon = W_\epsilon \cap \{\tau \mid y \geq \epsilon\},$$

und $G(\tau)$ konvergiert gleichmäßig auf K mit $r_0 \geq \epsilon$ nach dem Weierstraßschen Majorantentest.
Nach ebendiesem Kriterium mit der Funktion $G(\tau)$ als Majorante besitzt auch $F(\tau)$ die gewünschten Eigenschaften. □

1.2 Definition (Poincarésche Reihe)

Es seien $n \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{R}$, $0 \leq \kappa < 1$ und v ein MS vom Gewicht r zu ${}_1\Gamma$.
Dann definiert man für $\tau \in \mathbb{H}$ die **Poincarésche Reihe** zu ${}_1\Gamma$, r, v und $n+\kappa$ durch

$$G_r(\tau, v, n+\kappa) := \sum_{M \in \mathfrak{S}} \frac{e^{2\pi i(n+\kappa)M\tau}}{v(M)(M:\tau)^r},$$

wobei $\mathfrak{S}$ ein vollständiges System von Matrizen $M \in {}_1\Gamma$ mit verschiedenen zweiten Zeilen durchläuft.

1.3 Satz

Ist $r \in \mathbb{R}$, $r > 2$, und ist v ein MS zu ${}_1\Gamma$ vom Gewicht r mit $v(T) = e^{2\pi i\kappa}$. Dann ist für jedes $n \in \mathbb{Z}$ die POINCARÉsche Reihe $G_r(\tau, v, n+\kappa)$ als Funktion von τ auf $\mathbb{H}$ holomorph.
Die Reihe konvergiert absolut für jedes $\tau \in \mathbb{H}$ und kompakt gleichmäßig absolut auf $\mathbb{H}$. Die Summe hängt nicht von der Wahl von $\mathfrak{S}$ ab, und $G_r(\tau, v, n+\kappa)$ erfüllt die Transformationsgleichung

$$G_r(S\tau, v, n+\kappa) = (S:\tau)^r v(S) G_r(\tau, v, n+\kappa).$$

Es gilt weiterhin:

a) Ist $n+\kappa > 0$, so ist $G_r \in SS({}_1\Gamma, r, v)$, und G_r kann identisch verschwinden.

b) Im Fall $n+\kappa = 0$, d.h. $n = \kappa = 0$, ist $G_r \in \mathbb{G}({}_1\Gamma, r, v)$. G_r heißt dann **Eisenstein-Reihe** und verschwindet nicht identisch. Es gilt $\operatorname{ord}(G_r, \infty) = 0$.

c) Ist $n+\kappa < 0$, so verschwindet G_r nicht identisch und $\operatorname{ord}(G_r, \infty) = n+\kappa$.

<u>BEWEIS:</u>

i) Entfernt man aus der Reihe die Terme mit $M = T^k$, $M = -T^s$ $(k, s \in \mathbb{Z})$, so erhält man für die restlichen Reihenglieder mit II.1.1 (ii) die Gleichung

$$\left|\frac{\exp(2\pi i(n+\kappa)M\tau)}{v(M)(M:\tau)^r}\right| = \frac{\exp(\frac{-2\pi(n+\kappa)y}{|M:\tau|^2})}{|M:\tau|^r}.$$

Ist nun $(M:\tau) = \mu\tau + \nu$ für $\mu \neq 0$, so ist mit

$$f_{\mu,\nu}(\tau) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \operatorname{ggT}(\mu,\nu) \neq 1 \text{ und} \\ \frac{\exp(2\pi i(n+\kappa)M\tau)}{v(M)} & \text{sonst.} \end{cases}$$

die Reihe nach Satz 1.1 mit $\alpha := \max\{0, -2\pi(n+\kappa)\}$ absolut konvergent für jedes $\tau \in \mathbb{H}$. Nach Satz 1.1 konvergiert sie auf $\mathbb{H}$ auch kompakt gleichmäßig absolut. Da jeder Term auf $\mathbb{H}$ holomorph ist, ist demnach G_r auf $\mathbb{H}$ holomorph.

ii) Um zu zeigen, daß G_r von der Wahl von $\mathfrak{S}$ nicht abhängt, reicht es zu zeigen, daß man in jedem Term M durch TM ersetzen kann, denn M und TM haben dieselben zweiten Zeilen. Es gilt

$$\begin{aligned}\exp(2\pi i(n+\kappa)TM\tau) &= \exp(2\pi i(n+\kappa)(M\tau+1)) \\ &= \exp(2\pi i(n+\kappa))\cdot\exp(2\pi i(n+\kappa)M\tau) \\ &= \exp(2\pi i\kappa)\cdot\exp(2\pi i(n+\kappa)M\tau)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}v(TM)(TM:\tau)^r &= v(T)v(M)\cdot\sigma(T,M)(TM:\tau)^r \\ &= e^{2\pi i\kappa}v(M)\underbrace{(T:M\tau)^r}_{=1}\cdot(M:\tau)^r \\ &= e^{2\pi i\kappa}v(M)(M:\tau)^r,\end{aligned}$$

also

$$\frac{\exp(2\pi i(n+\kappa)TM\tau)}{v(TM)(TM:\tau)^r} = \frac{\exp(2\pi i(n+\kappa)M\tau)}{v(M)(M:\tau)^r},$$

d.h. die Terme sind invariant unter $M \mapsto TM$.
Nun existieren $k, s \in \mathbb{Z}$ mit $T^k, -T^s \in \mathfrak{S}$, und die zugehörigen Terme, welche in der Reihe vorkommen, sind

$$\delta_l = \frac{\exp(2\pi i(n+\kappa)(\tau+l)}{v(T^l)} \quad (l = k, s),$$

denn die einzelnen Terme sind invariant unter $M \mapsto -M$.
Wegen $\sigma(T^k, T^s) = 1$ für alle $k, s \in \mathbb{Z}$ nach Lemma II.1.1 (v), folgt dann $v(T^l) = e^{2\pi i\kappa l}$, also

$$\delta_s = \exp(2\pi i(n+\kappa)\tau) = \delta_k$$

aufgrund der Transformationsgleichung für das MS v.
Nach Satz 1.1 gilt dann

$$|G_r(\tau, v, n+\kappa) - 2e^{2\pi i(n+\kappa)\tau}| \leq \beta\cdot e^{\alpha/|\tau|}(|\tau|^{-r} + |\tau|^{-\frac{r}{2}}) \tag{1}$$

für alle $\tau \in \mathbb{H}$ mit $0 < \epsilon \leq \arg\tau \leq \pi - \epsilon$ und für ein geeignetes $\beta \geq 0$.
Weiterhin ist

$$\begin{aligned}\frac{G_r(S\tau, v, n+\kappa)}{(S:\tau)^r} &= \sum_{M\in\mathfrak{S}} \frac{\exp(2\pi i(n+\kappa)MS\tau)}{v(M)(M:S\tau)^r(S:\tau)^r} \\ &= v(S)\sum_{\substack{M^*\in\mathfrak{S}_S \\ M^*=MS}} \frac{\exp(2\pi i(n+\kappa)M^*\tau)}{v(M)v(S)\sigma(M,S)(M^*:\tau)^r} \\ &= v(S)\sum_{M^*\in\mathfrak{S}_S} \frac{\exp(2\pi i(n+\kappa)M^*\tau}{v(M^*)(M^*:\tau)^r} \\ &= v(S)G_r(\tau, v, n+\kappa),\end{aligned}$$

denn mit M durchläuft auch MS für festes $S \in {}_1\Gamma$ ein vollständiges System von Matrizen aus ${}_1\Gamma$ mit verschiedenen zweiten Zeilen.

iii) Zu den weiteren Aussagen untersucht man G_r in einer Umgebung von ∞. Nach der Transformationsgleichung in ii) ist die Funktion

$$e^{-2\pi i\kappa\tau}G_r(\tau, v, n+\kappa)$$

periodisch mit der Periode 1.
Sei also $0 \leq \operatorname{Re}\tau \leq 1$ und $|\tau| \geq 1$. Ferner sei $\epsilon > 0$ so gewählt, daß $\epsilon \leq \arg\tau \leq \pi - \epsilon$. Dann gibt es nach (1) ein $C_\epsilon > 0$ mit

$$|G_r(\tau, v, n+\kappa) - 2 \cdot e^{2\pi i(n+\kappa)\tau}| \leq C_\epsilon |\tau|^{-\frac{r}{2}}. \tag{2}$$

Setzt man $t := e^{2\pi i\tau}$, $t^\kappa = e^{2\pi i\kappa\tau}$, so ist $G_r t^{-\kappa}$ und auch $G_r t^{-\kappa} - 2t^n$ für $0 < |t| < 1$ in eine Laurent-Reihe entwickelbar, d.h.

$$G_r(\tau, v, n+\kappa) = t^\kappa(2t^n + \sum_{j=0}^{\infty} g_j t^j). \tag{3}$$

Wegen (2) ist $g_0 = 0$ im Falle $\kappa = 0$, da $t \to 0$ für $|\tau| \to \infty$ gilt.
Zusammen mit dem oben Bewiesenen folgt $G_r(\tau, v, n+\kappa) \in \mathbb{H}({}_1\Gamma, r, v)$.
Die Aussagen a)–c) liest man jetzt an der Darstellung (3) ab.

□

2 Die Fourierkoeffizienten der Poincaréschen Reihen

Um im weiteren die Fourierkoeffizienten der für $r > 2$ auf der oberen Halbebene holomorphen Modulformen $G_r(\tau, v, n+\kappa)$ im Unendlichen explizit berechnen zu können, bedarf es der Kenntnis einiger spezieller Eigenschaften der in I.3 eingeführten Bessel-Funktionen und der Gamma-Funktion

$$\Gamma(r) := \int_0^\infty t^{r-1}e^{-t}dt \quad (r > 0).$$

2.1 Lemma

Es seien $\mu_1, \mu_2, c > 0$ und $r > 2$ reelle Zahlen.

(i) Es gilt

$$\int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} w^{-r}e^{-2\pi i\mu_1 w}dw = (2\pi)^r \frac{\mu_1^{r-1}e^{-\frac{r}{2}\pi i}}{\Gamma(r)}.$$

(ii) Mit den Bessel-Funktionen J_{r-1} und I_{r-1} aus I.3 erhält man die Gleichungen

$$\int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} w^{-r}\exp(-2\pi i(\mu_1 w + \mu_2 w^{-1}))dw = 2\pi \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{\frac{1}{2}(r-1)} e^{-\frac{r}{2}\pi i} J_{r-1}(4\pi\sqrt{\mu_1\mu_2})$$

und

$$\int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} w^{-r}\exp(-2\pi i(\mu_1 w - \mu_2 w^{-1}))dw = 2\pi \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{\frac{1}{2}(r-1)} e^{-\frac{r}{2}\pi i} I_{r-1}(4\pi\sqrt{\mu_1\mu_2}).$$

<u>Beweis:</u>

(i) Nach [22], S.175 hat man

$$\frac{1}{\Gamma(r)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} w^{-r}e^{w}dw,$$

und durch eine Substitution $w = -2\pi i\mu_1 u$ erhält man das Ergebnis.

(ii) Man setzt in der linken Seite und in der zweiten Integraldarstellung von I.3 (ii) $u = 4\pi\sqrt{\mu_1\mu_2}$ und substituiert $w = -2\pi i\mu_1 u$.
Für die Darstellung von $I_{r-1}(4\pi\sqrt{\mu_1\mu_2})$ nutzt man die Identität

$$I_{r-1}(u) = e^{-\frac{1}{2}(r-1)\pi i} J_{r-1}(iu)$$

(vgl. [22], S.77) aus.

□

2.2 Satz

Es sei $\tau \in \mathbb{H}$, $r > 2$ und $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert die Reihe

$$\Phi_r(\tau,\kappa,\lambda) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\tau+n)^{-r}\exp(-2\pi i(\kappa n + \frac{\lambda}{\tau+n}))$$

kompakt gleichmäßig absolut auf $\mathbb{H}$ und definiert $\Phi_r(\tau,\kappa,\lambda)$ als holomorphe Funktion auf $\mathbb{H}$. Die Funktion $e^{-2\pi i\kappa\tau}\Phi_r(\tau,\kappa,\lambda)$ hat die Periode 1, und Φ_r besitzt eine Fourierentwicklung der Form

$$\Phi_r(\tau,\kappa,\lambda) = \sum_{n+\kappa>0} g_n e^{2\pi i(n+\kappa)\tau},$$

welche kompakt gleichmäßig absolut auf $\mathbb{H}$ konvergiert.

Die Fourier-Koeffizienten von Φ_r haben die Darstellung

$$\begin{aligned}
g_n &= \frac{(2\pi)^r}{\Gamma(r)} e^{-\frac{r}{2}\pi i}(n+\kappa)^{r-1} \quad \text{für } \lambda = 0,\\
g_n &= 2\pi e^{-\frac{r}{2}\pi i}\left(\frac{n+\kappa}{\lambda}\right)^{\frac{r-1}{2}} J_{r-1}(4\pi\sqrt{\lambda(n+\kappa)}) \quad \text{für } \lambda > 0 \text{ und}\\
g_n &= 2\pi e^{-\frac{2}{2}\pi i}\left(\frac{n+\kappa}{|\lambda|}\right)^{\frac{r-1}{2}} I_{r-1}(4\pi\sqrt{|\lambda|(n+\kappa)}) \quad \text{für } \lambda < 0.
\end{aligned}$$

<u>Beweis:</u>

Die kompakt gleichmäßig absolute Konvergenz auf $\mathbb{H}$ und somit die Holomorphie von Φ_r ist nach Satz 1.1 klar mit

$$f_{\mu,\nu}(\tau) = \begin{cases} \exp(-2\pi i(\kappa\nu + \frac{\lambda}{\tau+\nu})) & \text{für } \mu = 1,\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

und $\alpha := \max\{0, -2\pi\lambda\}$, denn für $\mu = 1$ gilt

$$\begin{aligned}
|f_{\mu,\nu}(\tau)| &= \exp(\mathrm{Re}\,(-2\pi i\frac{\lambda}{\tau+\nu}))\\
&= \exp(\mathrm{Re}\,(-2\pi i\frac{\lambda\overline{\tau}+\lambda\nu}{|\tau+\nu|^2}))\\
&= \exp(-\frac{2\pi\lambda y}{|\tau+\nu|^2}) \le \exp(\frac{\alpha y}{|\tau+\nu|^2})
\end{aligned}$$

mit $\alpha := \max\{0, -2\pi\lambda\}$.
Nun gilt

$$\begin{aligned}
\Phi_r(\tau+1,\kappa,\lambda) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\tau+1+n)^{-r}\exp(-2\pi i(\kappa n + \frac{\lambda}{\tau+1+n}))\\
&= e^{2\pi i\kappa}\Phi_r(\tau,\kappa,\lambda),
\end{aligned}$$

indem man über $n+1$ statt über n summiert.
Definiert man nun $t := e^{2\pi i\tau}$ und

$$G(t) := e^{-2\pi i\kappa\tau}\Phi_r(\tau,\kappa,\lambda),$$

so ist $G(t)$ wohldefiniert für $0 < |t| < 1$ und auf dieser punktierten Kreisscheibe holomorph. G besitzt also eine kompakt gleichmäßig absolut konvergente Laurent-Reihen-Entwicklung um 0 der Form

$$G(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_r t^r \quad (0 < |t| < 1),$$

wobei

$$g_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_\rho(0)} \frac{G(t)}{t^{n+1}} dt,$$

mit $0 < \rho < 1$.
Sei nun $\rho = e^{-2\pi c} < 1$ mit $c > 0$ gewählt, so wird

$$\begin{aligned} g_n &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial B_\rho(0)} \frac{G(t)}{t^{n+1}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{ic}^{1+ic} 2\pi i e^{2\pi i z} \frac{e^{-2\pi i \kappa z} \Phi_r(z,\kappa,\lambda)}{e^{2\pi i (n+1) z}} dz \\ &= \int\limits_{ic}^{1+ic} e^{-2\pi i (n+\kappa) z} \Phi_r(z,\kappa,\lambda) dz. \end{aligned}$$

Aufgrund der kompakt gleichmäßigen Konvergenz der Reihe Φ_r hat man

$$\begin{aligned} g_n &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int\limits_{ic}^{1+ic} (z+\nu)^{-r} e^{-2\pi i (n+\kappa) z} \exp(-2\pi i (\kappa \nu + \frac{\lambda}{z+\nu})) dz \\ &= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int\limits_{ic+\nu}^{ic+\nu+1} z^{-r} \exp(-2\pi i ((n+\kappa) z + \frac{\lambda}{z})) dz \\ &= \int\limits_{-\infty+ic}^{\infty+ic} z^{-r} \exp(-2\pi i ((n+\kappa) z + \frac{\lambda}{z})) dz. \qquad (1) \end{aligned}$$

Ist $n + \kappa \leq 0$, so ist

$$\mathrm{Re}\,(-2\pi i (n+\kappa) z) = 2\pi (n+\kappa) y \leq 0. \qquad (2)$$

Ersetzt man nun den Integrationsweg durch einen großen Halbkreis mit Mittelpunkt ic und Radius $R > 0$ in $\mathbb{H}$, so verschwindet das Integral aufgrund des Residuensatzes ebenso wie das Integral über den Kreisbogen für $R \to \infty$ wegen $r > 2$ und (2). Man erhält somit $g_n = 0$.
Sei also $n + \kappa > 0$.
Setzt man in Lemma 2.1 (i) $\mu_1 = n + \kappa$, so erhält man aus (1) den gewünschten Fourier-Koeffizienten für $\lambda = 0$.
Ist $\lambda \neq 0$, so erhält man die Formeln für $\lambda > 0$ und $\lambda < 0$ aus (1) und den Gleichungen in Lemma 2.1 (ii), indem man $\mu_1 = n + \kappa$ und $\mu_2 = |\lambda|$ setzt. $\square$

Eine weitere wichtige Rolle bei der Berechnung der Fourierkoeffizienten spielt die Struktur des Systems $\mathfrak{S}$ der Matrizen aus ${}_1\Gamma$ mit verschiedenen zweiten Zeilen. Dieses soll im folgenden genauer untersucht werden.

2.3 Definition (Kloosterman-Summe)

Ist $\mathfrak{S}$ ein vollständiges System von Matrizen mit verschiedenen zweiten Zeilen, und ist $S = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{S}$ mit $\gamma \neq 0$, so existiert zu $S^* = \left(\begin{smallmatrix} \alpha^* & \beta^* \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in {}_1\Gamma$ wegen $\alpha^*\delta - \beta^*\gamma = 1 = \alpha\delta - \beta\gamma$ genau ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $T^k S^* = S$.
Ferner ist δ mod γ wegen $\alpha\delta \equiv 1 \bmod \gamma$ eindeutig bestimmt.
Demnach gibt es zu jedem $\gamma \neq 0$ (d.h. $S \neq \pm T^s$, $s \in \mathbb{Z}$) ein vollständiges System S_γ von mod γ inkongruenten Resten δ', so daß alle zweiten Zeilen (γ, δ) (γ fest) der $S \in \mathfrak{S}$ durch

$$\delta = \delta' + n\gamma \quad (\delta' \in S_\gamma,\ n \in \mathbb{Z})$$

dargestellt werden.
Ebenso gibt es ein vollständiges System S'_γ von mod γ inkongruenten Resten α', so daß alle ersten Spalten $\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$ (γ fest) der $S \in \mathfrak{S}$ durch

$$\alpha = \alpha' + n'\gamma \quad (\alpha' \in S'_\gamma,\ n' \in \mathbb{Z})$$

dargestellt werden.
Ist $S = \left(\begin{smallmatrix} \alpha' & * \\ \gamma & \delta' \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{S}$ mit $\delta' \in S_\gamma$ und $\alpha' \in S'_\gamma$, so bestimmen sich α' und δ' durch die Bedingung $\alpha'\delta' \equiv 1 \mod \gamma$ eindeutig als Elemente der primen Restklasse mod γ.

Definiert man für feste $n, m, \gamma \in \mathbb{Z},\ \gamma > 0,\ \kappa \in \mathbb{R}$ und ein MS v zur Gruppe ${}_1\Gamma$ die **Kloosterman-Summe** durch

$$W_\gamma(m+\kappa, v, n+\kappa) := \sum_{\substack{\delta \in S_\gamma \\ \alpha\delta \equiv 1 \bmod \gamma}} v\left(\left(\begin{smallmatrix} \alpha & * \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)\right)^{-1} e^{\frac{2\pi i}{\gamma}((m+\kappa)\alpha + (n+\kappa)\delta)},$$

so hängt diese Summe von der Auswahl der Restsysteme S_γ bzw. S'_γ nicht ab.
Die Summe ist endlich, und es gilt die triviale Abschätzung

$$|W_\gamma(m+\kappa, v, n+\kappa)| \leq \varphi(\gamma) \leq \gamma.$$

Im folgenden sei das System $\mathfrak{S}$ immer so gewählt, daß mit $M \in \mathfrak{S}$ auch $-M \in \mathfrak{S}$ gilt.

2.4 Satz

Es seien $n \in \mathbb{Z}$, $r > 2$, v ein MS vom Gewicht r zur Gruppe ${}_1\Gamma$ mit $v(T) = e^{2\pi i\kappa}$ $(0 \leq \kappa < 1)$ und $W_\gamma := W_\gamma(m+\kappa, v, n+\kappa)$.
Dann ist

$$G_r(\tau, v, n+\kappa) = 2e^{2\pi i(n+\kappa)\tau} + \sum_{m+\kappa>0} a_{r,m+\kappa}(v, n+\kappa) e^{2\pi i(m+\kappa)\tau},$$

und für die Fourierkoeffizienten im Falle $m + \kappa > 0$ gelten die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned} a_{r,m}(v,0) &= 2\frac{(2\pi)^r}{\Gamma(r)} e^{-\frac{1}{2}\pi i r} m^{r-1} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{W_\gamma}{\gamma^r} \quad (n = \kappa = 0), \\ a_{r,m+\kappa}(v, n+\kappa) &= 4\pi e^{-\frac{1}{2}\pi i r} \left(\frac{m+\kappa}{n+\kappa}\right)^{\frac{r-1}{2}} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{W_\gamma}{\gamma} J_{r-1}\left(\frac{4\pi}{\gamma}\sqrt{(m+\kappa)(n+\kappa)}\right) \end{aligned}$$

für $n+\kappa > 0$, und

$$a_{r,m+\kappa}(v,n+\kappa) \;=\; 4\pi e^{-\frac{1}{2}\pi i r}\left(\frac{m+\kappa}{|n+\kappa|}\right)^{\frac{r-1}{2}}\sum_{\gamma=1}^{\infty}\frac{W_\gamma}{\gamma}I_{r-1}(\frac{4\pi}{\gamma}\sqrt{(m+\kappa)|n+\kappa|})$$

für $n+\kappa < 0$.

<u>Beweis:</u>

Aufgrund der Konvention in 2.3 gilt

$$\begin{aligned} G_r(\tau,v,n+\kappa) &= \sum_{M\in\mathfrak{S}}\frac{e^{2\pi i(n+\kappa)M\tau}}{v(M)(M:\tau)^r} \\ &= 2e^{2\pi i(n+\kappa)\tau} + \sum_{\substack{M=\left(\begin{smallmatrix}\alpha & *\\ \gamma & \delta'\end{smallmatrix}\right)\in\mathfrak{S}\\ \gamma\neq 0}}\frac{e^{2\pi i(n+\kappa)M\tau}}{v(M)(M:\tau)^r} \\ &= 2e^{2\pi i(n+\kappa)\tau} + 2\sum_{\substack{M\in\mathfrak{S}\\ \gamma>0}}\frac{e^{2\pi i(n+\kappa)M\tau}}{v(M)(M:\tau)^r}, \end{aligned}$$

da wegen

$$v(-M)(-M:\tau)^r = v(M)(M:\tau)^r$$

M und $-M$ denselben Beitrag zur Summe liefern.
Es sei nun $\gamma > 0$. Dann enthält die Menge

$$M_\gamma := \{ST^k \mid S = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) \in {}_1\Gamma,\ 0\le\alpha,\delta<\gamma,\ \mathrm{ggT}(\gamma,\delta)=1,\ \alpha\delta\equiv 1 \bmod \gamma, k\in\mathbb{Z}\}$$

nach 2.3 ein vollständiges System von Matrizen mit verschiedenen zweiten Zeilen der Form (γ,δ^*).
Für jedes S von der obigen Form schreiben wir

$$\zeta_S := \tau + \frac{\delta}{\gamma}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} v(ST^k)(ST^k:\tau)^r &= v(S)v(T^k)(ST^k:\tau)^r = e^{2\pi i\kappa k}v(S)(S:T^k\tau)^r\underbrace{(T^k:\tau)^r}_{=1} \\ &= e^{2\pi i\kappa k}v(S)(\gamma(\tau+k)+\delta)^r \\ &= \gamma^r e^{2\pi i\kappa k}v(S)(\zeta_S+k)^r \end{aligned}$$

für $k\in\mathbb{Z}$. Weiterhin ist

$$ST^k\tau = S(\tau+k) = \frac{\alpha(\tau+k)+\beta}{\gamma(\tau+k)+\delta} = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^2(\zeta_S+k)}$$

für $k\in\mathbb{Z}$ richtig.

Ist nun S_γ ein vollständiges System von zu γ teilerfremden Resten $0 \leq \delta < \gamma$, so erhält man, da G_r von der Auswahl des Systems von Matrizen mit verschiedenen zweiten Zeilen nicht abhängt,

$$\begin{aligned}
G_r(\tau, v, n+\kappa) &= 2e^{2\pi i(n+\kappa)\tau} + 2\sum_{\gamma=1}^{\infty} \sum_{M \in M_\gamma} \frac{e^{2\pi i(n+\kappa)M\tau}}{v(M)(M:\tau)^r} \\
&= 2e^{2\pi i(n+\kappa)\tau} + 2\sum_{\gamma=1}^{\infty} \sum_{\substack{\delta \in S_\gamma \\ \alpha\delta \equiv 1 \bmod \gamma \\ S=\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)}} \frac{e^{\frac{2\pi i}{\gamma}(n+\kappa)\alpha}}{\gamma^r v(S)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\zeta_s + k)^{-r} e^{-2\pi i(\kappa k + \frac{n+\kappa}{\gamma^2(\zeta_s+k)})} \\
&= 2e^{2\pi i(n+\kappa)\tau} + 2\sum_{\gamma=1}^{\infty} \sum_{\substack{\delta \in S_\gamma \\ \alpha\delta \equiv 1 \bmod \gamma \\ S=\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)}} \frac{e^{\frac{2\pi i}{\gamma}(n+\kappa)\alpha}}{\gamma^r v(S)} \Phi_r(\zeta_S, \kappa, \frac{n+\kappa}{\gamma^2}) \\
&= 2e^{2\pi i(n+\kappa)\tau} + 2\sum_{\gamma=1}^{\infty} \sum_{\substack{\delta \in S_\gamma \\ \alpha\delta \equiv 1 \bmod \gamma}} \frac{e^{\frac{2\pi i}{\gamma}(n+\kappa)\alpha}}{\gamma^r v(S)} \sum_{m+\kappa>0} g_m e^{2\pi i(m+\kappa)(\tau+\frac{\delta}{\gamma})} \\
&= 2e^{2\pi i(n+\kappa)\tau} + \sum_{m+\kappa>0} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{\substack{\delta \in S_\gamma \\ \alpha\delta \equiv 1 \bmod \gamma}} v^{-1}(S) e^{\frac{2\pi i}{\gamma}((n+\kappa)\alpha + (m+\kappa)\delta)}}_{=W_\gamma(m+\kappa, v, n+\kappa)} \frac{g_m}{\gamma^r} e^{2\pi i(m+\kappa)\tau} \\
&= 2e^{2\pi i(n+\kappa)\tau} + \sum_{m+\kappa>0} a_{r,m+\kappa}(v, n+\kappa) e^{2\pi i(m+\kappa)\tau}
\end{aligned}$$

mit

$$a_{r,m+\kappa}(v, n+\kappa) = 2\sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{W_\gamma(m+\kappa, v, n+\kappa)}{\gamma^r} g_m.$$

Hier sind die g_m mit $\lambda = \frac{n+\kappa}{\gamma^2}$ die Fourierkoeffizienten der Reihe $\Phi_r(\tau, \kappa, \lambda)$ aus Satz 2.2.
Dies ergibt für die Fälle $n = \kappa = 0$ ($\lambda = 0$), $n + \kappa > 0$ ($\lambda > 0$) und $n + \kappa < 0$ ($\lambda < 0$) die gewünschten Darstellungen der Koeffizienten $a_{r,m+\kappa}(v, n+\kappa)$.
Da die Reihe $G_r(\tau, v, n+\kappa)$ für jedes $\tau \in \mathbb{H}$ absolut konvergiert, darf die Summation an den betreffenden Stellen vertauscht werden. □

Nutzt man die Darstellung II.3 (i) der Besselfunktion I_{r-1} aus, so erhält man für die Fourierkoeffizienten $a_{r,m+\kappa}(v, n+\kappa)$ im Fall $n + \kappa \leq 0$ eine erste Abschätzung.

2.5 Korollar

Benutzt man die Bezeichnungen von Satz 2.4, so gibt es eine Konstante $C(r)$, welche nur von r abhängt, so daß

$$|a_{r,m+\kappa}(v, n+\kappa)| \leq C(r)(m+\kappa)^{r-1} \exp(4\pi\sqrt{(m+\kappa)|n+\kappa|})$$

für alle $m \geq 0$, $n+\kappa \leq 0$ gilt.

<u>Beweis:</u>

Nach II.3 (i) ist für $u > 0$

$$I_{r-1}(u) = \frac{2^{2-r}}{\sqrt{\pi}\Gamma(r-\frac{1}{2})} u^{r-1} \int_0^1 (1-t^2)^{r-\frac{3}{2}} \cosh utdt, \tag{1}$$

und man erhält die Abschätzung

$$\int_0^1 (1-t^2)^{r-\frac{3}{2}} \frac{1}{2}(e^{ut}+e^{-ut})dt \leq e^u \int_0^1 (1-t^2)^{r-\frac{3}{2}} dt.$$

Zusammen mit

$$\int_0^1 (1-t^2)^{r-\frac{3}{2}} dt = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(r-\frac{1}{2})}{\Gamma(r)}$$

und

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

folgt aus (1) die Ungleichung

$$I_{r-1}(u) \leq \frac{2^{1-r}}{\Gamma(r)} u^{r-1} e^u.$$

Ist nun $n+\kappa < 0$, so ist $u := \frac{4\pi}{\gamma}\sqrt{(m+\kappa)|n+\kappa|} > 0$, und man hat

$$I_{r-1}(u) \leq \frac{2^{1-r}(4\pi)^{r-1}}{\Gamma(r)\gamma^{r-1}} (m+\kappa)^{\frac{r-1}{2}} |n+\kappa|^{\frac{r-1}{2}} \exp(\frac{4\pi}{\gamma}\sqrt{(m+\kappa)|n+\kappa|}). \tag{2}$$

Nach Satz 2.4 gilt dann

$$\begin{aligned} |a_{r,m+\kappa}(v, n+\kappa)| &= 2\pi(m+\kappa)^{\frac{r-1}{2}} |n+\kappa|^{\frac{1-r}{2}} \left| \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{W_\gamma}{\gamma} I_{r-1}(\frac{4\pi}{\gamma}\sqrt{(m+\kappa)|n+\kappa|}) \right| \\ &\overset{(2)}{\leq} \frac{(2\pi)^r}{\Gamma(r)} (m+\kappa)^{r-1} \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma^{r-1}} \exp(\frac{4\pi}{\gamma}\sqrt{(m+\kappa)|n+\kappa|}) \end{aligned}$$

mit der Abschätzung $|W_\gamma| \leq \gamma$ aus 2.3.
Es ist

$$|a_{r,m+\kappa}(v, n+\kappa)| \leq C(r)(m+\kappa)^{r-1} \exp(4\pi\sqrt{(m+\kappa)|n+\kappa|}) \qquad (3)$$

mit $C(r) := \frac{(2\pi)^r}{\Gamma(r)}\zeta(r-1)$ im Falle $n+\kappa < 0$.
Ist hingegen $n+\kappa = 0$, d.h. $n = \kappa = 0$, so gilt

$$\begin{aligned} |a_{r,m}(v,0)| &= \frac{(2\pi)^r}{\Gamma(r)} m^{r-1} \left| \sum_{\gamma=1}^{\infty} \frac{W_\gamma(m,v,0)}{\gamma^r} \right| \\ &\leq C(r) m^{r-1} \end{aligned} \qquad (4)$$

mit $C(r) := \frac{(2\pi)^r}{\Gamma(r)}\zeta(r-1)$.
Aus (3) und (4) folgt dann die Behauptung. □

Unter Zuhilfenahme der in Lemma II.2.2 nachgewiesenen Symmetrieeigenschaften der Modulgruppe kann man außerdem zeigen, daß es sich bei sämtlichen Koeffizienten $a_{r,m+\kappa}(v, n+\kappa)$ $(m \geq 0,\ n \in \mathbb{Z})$ um reelle Zahlen handelt.

2.6 Satz

Für jedes $n \in \mathbb{Z}$, $m \geq 0$ und $r > 2$ gilt

$$a_{r,m+\kappa}(v, n+\kappa) \in \mathbb{R}$$

in den Bezeichnungen von Satz 2.4.

Beweis:

Aufgrund der Darstellung in Satz 2.4 ist nur zu zeigen, daß

$$e^{-\frac{\pi i r}{2}} W_\gamma(m+\kappa, v, n+\kappa) \in \mathbb{R}$$

für $\gamma > 0$ richtig ist.
Nach II.2.1 (ii) und Lemma II.2.2 (vi) gilt für $L = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)$ mit $\gamma > 0$

$$v\left(\left(\begin{smallmatrix} -\alpha & \beta \\ \gamma & -\delta \end{smallmatrix}\right)\right) = e^{-\pi i r} v(\tilde{L}) = e^{-\pi i r} \overline{v}(L). \quad (*)$$

Bezeichnet wieder S_γ ein vollständiges System von zu $\gamma > 0$ teilerfremden

Resten $0 \leq \delta < \gamma$, so folgt

$$\begin{aligned}
\overline{e^{-\frac{\pi i r}{2}} W_\gamma(m+\kappa, v, n+\kappa)} &= e^{\frac{\pi i r}{2}} \overline{W_\gamma(m+\kappa, v, n+\kappa)} \\
&= e^{\frac{\pi i r}{2}} \sum_{\substack{\delta \in S_\gamma \\ \alpha\delta \equiv 1 \bmod \gamma}} v\left(\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)\right) e^{-\frac{2\pi i}{\gamma}((m+\kappa)\alpha + (n+\kappa)\delta)} \\
&= e^{\frac{\pi i r}{2}} \sum_{\substack{\delta \in S_\gamma \\ \alpha\delta \equiv 1 \bmod \gamma}} v\left(\left(\begin{smallmatrix} -\alpha & \beta \\ \gamma & -\delta \end{smallmatrix}\right)\right) e^{\frac{2\pi i}{\gamma}((m+\kappa)\alpha + (n+\kappa)\delta)} \\
&\overset{(*)}{=} e^{-\frac{\pi i r}{2}} \sum_{\substack{\delta \in S_\gamma \\ \alpha\delta \equiv 1 \bmod \gamma}} v\left(\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)\right)^{-1} e^{\frac{2\pi i}{\gamma}((m+\kappa)\alpha + (n+\kappa)\delta)} \\
&= e^{-\frac{\pi i r}{2}} W_\gamma(m+\kappa, v, n+\kappa) \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

was die Behauptung war. $\square$

Kapitel V

Der Vektorraum der ganzen Modulformen

Ziel dieses Kapitels ist es, die Endlichkeit der Dimension der Vektorräume $\mathbb{G}({}_1\Gamma, r, v)$ und $SS({}_1\Gamma, r, v)$ für beliebiges $r \in \mathbb{R}$ nachzuweisen und für den Fall $r > 2$ jeweils eine aus gewissen POINCARÉschen Reihen bestehende Basis anzugeben.
Wir setzen hier als bekannt voraus, daß

$$\dim \mathbb{G}({}_1\Gamma, k, 1) = \begin{cases} [\frac{k}{12}] + 1, & \text{falls } k \not\equiv 2 \mod 12 \\ [\frac{k}{12}], & \text{falls } k \equiv 2 \mod 12 \end{cases}$$

für jede gerade ganze Zahl $k \geq 0$ gilt. Hierbei bezeichnet 1 das Multiplikatorsystem v mit $v(M) = 1$ für alle $M \in {}_1\Gamma$ vom Gewicht k.
(vgl. [8], S.100).

1 Die Dimension des Vektorraums $\mathbb{G}({}_1\Gamma, r, v)$

1.1 Satz

Ist $v = v_{a,b}$ ein Multiplikatorsystem für ${}_1\Gamma$ vom Gewicht $r \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\dim \mathbb{G}({}_1\Gamma, r, v) = \begin{cases} \frac{r}{12} - \kappa - \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + 1 & r - 12\kappa \geq 0 \\ 0 & r - 12\kappa < 0, \end{cases}$$

wobei κ nach II.2.1 eindeutig durch a, b und r bestimmt ist.

<u>BEWEIS:</u>

i) Zunächst soll der Vektorraum $\mathbb{G}({}_1\Gamma, r, 1)$ für ganzzahliges $r < 0$ untersucht werden.
Sei also $r \in \mathbb{Z}$.
Ist $r \equiv 1 \mod 2$, so ist $\dim \mathbb{G}({}_1\Gamma, r, 1) = 0$, denn

$$f(-E\tau) = f(\tau) = (-1)^{|r|} f(\tau) \quad \Rightarrow \quad f \equiv 0.$$

Sei also $r \in -2\mathbb{N}$ und $f \in \mathbb{G}({}_1\Gamma, r, 1)$. Dann ist nach III.4.1 c)

$$g(\tau) := f^2(\tau) g_2^{-\frac{r}{2}} \in \mathbb{H}({}_1\Gamma, 0, 1)$$

invariant unter ${}_1\Gamma$ und hat keine Pole, muß demnach konstant sein.
Es gilt ferner $g_2(\rho) = 0$ nach III.4.1 d), also ist $g \equiv 0$, also auch $f \equiv 0$, da g_2 nicht identisch verschwindet.
Für negative $r \in \mathbb{Z}$ folgt demnach $\dim \mathbb{G}({}_1\Gamma, r, 1) = 0$.

ii) Es sei r^* das Gewicht und v^* das MS von $\Delta^\kappa(\tau)$ zu ${}_1\Gamma$, wobei die Potenz von Δ wie in Bemerkung II.4.2 definiert sei, also

$$\Delta^\kappa(S\tau) = v^*(S)(S:\tau)^{12\kappa}\Delta^\kappa(\tau).$$

Ferner seien κ^*, a^*, b^* durch obige Überlegungen festgelegt.

Da Δ aber nach III.4.1 b) und c) eine Modulform vom Gewicht 12 mit MS $v \equiv 1$ zur Modulgruppe ist, gilt $\kappa^* = \kappa$ und $r^* = 12\kappa$, also $\kappa^* = \kappa = \frac{r^*}{12}$.

Nach den Ausführungen in II.2.1 existiert ein $l \in \mathbb{Z}$ mit

$$\frac{r^*}{12} = \kappa^* + \frac{a^*}{3} + \frac{b^*}{2} + l,$$

also $\frac{a^*}{3} + \frac{b^*}{2} \in \mathbb{Z}$, was gleichbedeutend mit $a^* = b^* = 0$ ist.

Es folgt

$$\frac{r^*}{6} + \frac{a^*}{3} = \frac{r^*}{6} = 2\kappa = \frac{r}{6} + \frac{a}{3} + l_1 \quad (l_1 \in \mathbb{Z})$$

und

$$\frac{r^*}{4} + \frac{b^*}{2} = \frac{r^*}{4} = 3\kappa = \frac{r}{4} + \frac{b}{2} + l_2 \quad (l_2 \in \mathbb{Z}),$$

d.h. $v(V) = v^*(V)$, $v(J) = v^*(J)$ und $v(T) = v^*(T)$. Wegen $r = r^* + 2k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ gilt demnach $v = v^*$.

Sei nun $f \in \mathbb{G}({}_1\Gamma, r, v)$.

Dann ist $\operatorname{ord}(f, \infty) \geq \kappa$, also $g := f\Delta^{-\kappa} \in \mathbb{G}({}_1\Gamma, r - 12\kappa, 1)$.

Ist umgekehrt $g \in \mathbb{G}({}_1\Gamma, r - 12\kappa, 1)$, so ist $g\Delta^\kappa \in \mathbb{G}({}_1\Gamma, r, v)$.

Es gilt also $\dim \mathbb{G}({}_1\Gamma, r, v) = \dim \mathbb{G}({}_1\Gamma, r - 12\kappa, 1)$ und

$$\frac{r - 12\kappa}{12} = g + \frac{a}{3} + \frac{b}{2}$$

mit einem $g \in \mathbb{Z}$, d.h. $r - 12\kappa \in \mathbb{Z}$ und $r - 12\kappa \equiv 0 \mod 2$.

Ist dann $r - 12\kappa \geq 0$, und gilt weiterhin $r - 12\kappa \equiv 2 \mod 12$, so erhält man $2a + 3b \equiv 1 \mod 6$ und daraus $(a, b) = (2, 1)$.

In diesem Fall ist

$$\frac{r - 12\kappa}{12} = g + \frac{7}{6}$$

mit $g \geq -1$ und

$$[\frac{r - 12\kappa}{12}] = g + 1.$$

In allen anderen Fällen ist

$$[\frac{r - 12\kappa}{12}] = g$$

und

$$\dim \mathbb{G}({}_1\Gamma, r - 12\kappa, 1) = g + 1.$$

Faßt man die Ergebnisse zusammen, so erhält man

$$\dim \mathbb{G}({}_1\Gamma, r-12\kappa, 1) = \dim \mathbb{G}({}_1\Gamma, r, v) = g + 1 = \frac{r}{12} - \kappa - \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + 1.$$

Für $r - 12\kappa < 0$ gilt $\dim \mathbb{G}({}_1\Gamma, r, v) = 0$ wegen i), womit die Behauptung gezeigt ist.

□

1.2 Bemerkung

Wie aus Satz 1.1 hervorgeht, gibt es keine ganzen Modulformen $g \not\equiv 0$ von negativem Gewicht. Demnach ist jedes $f \in \mathbb{H}({}_1\Gamma, r, v)$ vom Gewicht $r < 0$ durch seinen Hauptteil im Unendlichen eindeutig bestimmt.
Sind nämlich $f_1, f_2 \in \mathbb{H}({}_1\Gamma, r, v)$ zwei Modulformen, welche für hinreichend großes $y = \operatorname{Im}\tau$ im Unendlichen denselben Hauptteil besitzen, so gilt $f_1 - f_2 \in \mathbb{G}({}_1\Gamma, r, v)$, also $f_1 = f_2$ im Fall $r < 0$.

1.3 Satz

Es sei

$$f(\tau) = \sum_{m=0}^{\infty} b_{m+\kappa}(f) e^{2\pi i(m+\kappa)\tau} \in \mathbb{G}({}_1\Gamma, r, v)$$

und $\mu = \dim \mathbb{G}({}_1\Gamma, r, v)$.
Dann gilt

$$f \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad b_{m+\kappa}(f) = 0 \text{ für } m = 0, \ldots, \mu - 1.$$

<u>Beweis:</u>

Nach III.3.1 ist $\nu(f) \geq \kappa + \frac{a}{3} + \frac{b}{2}$.

<u>Beh.:</u> Ist $f \not\equiv 0$, so gilt $\nu(f) = \frac{r}{12}$.

<u>Bew.:</u> Es sei $k \in 2\mathbb{N}_0$ und $g \in \mathbb{G}({}_1\Gamma, k, 1)$.
Wendet man die *Gewichtsformel für holomorphe Modulformen* auf g an, so erhält man $\nu(g) = \frac{k}{12}$.
(vgl. [2], Theorem 6.1, S. 115)
Sei nun $f \in \mathbb{G}({}_1\Gamma, r, v)$ und $f \not\equiv 0$. Dann ist

$$\nu(f) = \nu(\Delta^\kappa \cdot \frac{f}{\Delta^\kappa}) = \nu(\Delta^\kappa) + \nu(\frac{f}{\Delta^\kappa}) = \kappa + \frac{r-12\kappa}{12} = \frac{r}{12},$$

denn $r - 12\kappa \in 2\mathbb{N}_0$ und $f\Delta^{-\kappa} \in \mathbb{G}({}_1\Gamma, r-12\kappa, 1)$ nach den Ausführungen im Beweis des Satzes 1.1. □

Wäre nun $b_{m+\kappa}(f) = 0$ für $m = 0, \ldots, \mu - 1$ und $f \not\equiv 0$, so würde aus Satz 1.1 die Richtigkeit der Abschätzung

$$\frac{r}{12} = \nu(f) \geq \kappa + \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + \mu = \frac{r}{12} + 1$$

folgen, was zu einem Widerspruch führt. Demnach ist $f \equiv 0$. □

Im Hinblick auf die weiteren Untersuchungen sei jetzt und im folgenden immer $r > 2$. In diesem Fall läßt sich auch für die Spitzenformen vom Gewicht r zum MS v eine Dimensionsformel herleiten.
Wie schon in III.2.1 bemerkt, kann es nur im Fall $\kappa = 0$ ganze Modulformen geben, die keine Spitzenformen sind.
Eine Aussage darüber treffen der folgende Satz und das sich ihm anschließende Korollar.

1.4 Satz

Ist $r > 2$, v ein MS vom Gewicht r zu ${}_1\Gamma$ und $f \in \mathbb{G}({}_1\Gamma, r, v)$. Dann gibt es ein $H \in SS({}_1\Gamma, r, v)$ und ein $\alpha \in \mathbb{C}$ mit

$$H(\tau) + \alpha \cdot G_r(\tau, v, 0) = f(\tau).$$

<u>Beweis:</u>

Es sei

$$f(\tau) = \sum_{m+\kappa \geq 0} b_{m+\kappa} e^{2\pi i(m+\kappa)\tau} \in \mathbb{G}({}_1\Gamma, r, v).$$

Ist $\kappa > 0$, so ist $f \in SS({}_1\Gamma, r, v)$ und mit $\alpha = 0$ ergibt sich sofort die Behauptung.
Sei also $\kappa = 0$.
Nach Satz IV.2.4 ist $G_r(\tau, v, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{2\pi i n\tau}$ mit $a_0 = 2$.
Wählt man $\alpha = \frac{1}{2} b_0$, so gilt

$$\begin{aligned} f(\tau) - \alpha G_r(\tau, v, 0) &= f(\tau) - \frac{1}{2} b_0 \cdot 2 - \sum_{n>0} \frac{1}{2} b_0 a_n e^{2\pi i n\tau} \\ &= \sum_{n>0} (b_n - \frac{1}{2} b_0 a_n) e^{2\pi i n\tau}. \qquad (1) \end{aligned}$$

Wegen $f, G_r(\tau, v, 0) \in \mathbb{G}({}_1\Gamma, r, v)$ ist auch $f - \alpha G_r(\tau, v, 0) \in \mathbb{G}({}_1\Gamma, r, v)$ und besitzt eine Fourier-Entwicklung der Form (1), d.h.

$$f(\tau) - \alpha \cdot G_r(\tau, v, 0) \in SS({}_1\Gamma, r, v),$$

was die Behauptung war. □

1.5 Korollar

Ist $r > 2$ und $v = v_{a,b}$ ein MS vom Gewicht r, so gilt

$$\dim SS({}_1\Gamma, r, v) = \frac{r}{12} - \kappa^+ - \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + 1.$$

Hierbei ist

$$\kappa^+ := \begin{cases} \kappa & \text{für } \kappa > 0 \\ 1 & \text{für } \kappa = 0. \end{cases}$$

<u>BEWEIS:</u>

Ist $r > 2$, so gilt nach Satz 1.4

$$\dim SS({}_1\Gamma, r, v) = \begin{cases} \dim \mathbb{G}({}_1\Gamma, r, v), & \text{falls } \kappa = \kappa^+ > 0, \\ \dim \mathbb{G}({}_1\Gamma, r, v) - 1, & \text{falls } \kappa = 0 = \kappa^+ - 1. \end{cases}$$

Ist $\kappa = 0$, so ist $r - 12\kappa = r > 2$.
Ist hingegen $\kappa = \kappa^+ > 0$ und $r - 12\kappa < 0$, so ist für diesen Fall noch zu zeigen, daß

$$n := \frac{r}{12} - \kappa^+ - \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + 1 = 0$$

richtig ist.
Es ist $n \in \mathbb{Z}$ und $n > \frac{1}{6} - 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 1 = -1$ für $r > 2$, also $n \geq 0$. Wegen $r - 12\kappa^+ < 0$ gilt aber $-1 \leq n - 1 < 0$, also $n = 0$.
Faßt man diese Ergebnisse zusammen und benutzt die Formel aus Satz 1.1, so ergibt sich

$$\dim SS({}_1\Gamma, r, v) = \frac{r}{12} - \kappa^+ - \frac{a}{3} - \frac{b}{2} + 1.$$

□

2 Eine Basis von $\mathbb{G}({}_1\Gamma, r, v)$

Um Aussagen über eine Basis von $\mathbb{G}({}_1\Gamma, r, v)$ bzw. $SS({}_1\Gamma, r, v)$ für den Fall $r > 2$ machen zu können, definieren wir auf $\mathbb{H}({}_1\Gamma, r, v)$ ein inneres Produkt, welches als Skalarprodukt auf $SS({}_1\Gamma, r, v)$ diesen endlich-dimensionalen Vektorraum zu einem Hilbertraum macht.
Wir betrachten dazu das Volumenelement

$$\mathrm{d}\omega = d\omega(\tau) := \frac{dxdy}{y^2}$$

für $\tau = x + iy \in \mathbb{H}$.
Das Volumenelement ist invariant unter allen Abbildungen $\tau \mapsto M\tau$ mit $M \in {}_1\Gamma$ wegen

$$(M\tau)' = \frac{1}{|M:\tau|^2}$$

und

$$\operatorname{Im} M\tau = \frac{y}{|M:\tau|^2}$$

nach II.1.1 (i), (ii).
Ist G eine meßbare Teilmenge von $\mathbb{H}$, so heißt

$$\omega(G) := \int_G d\omega$$

die $\mathbb{H}$-Fläche oder hyperbolische Fläche von G.

2.1 Lemma

Für den Fundamentalbereich

$$\mathfrak{F} := \{\tau \in \mathbb{H} \mid |\tau| \geq 1, -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}\tau < \frac{1}{2};\ -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}\tau \leq 0,\ \text{falls } |\tau| = 1.\}$$

von ${}_1\Gamma$ gilt

$$\omega(\mathfrak{F}) = \omega(\overline{\mathfrak{F}}) = \frac{\pi}{3}.$$

<u>Beweis:</u>

Es gilt

$$\omega(\mathfrak{F}) = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dydx}{y^2} = \int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2 \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

□

2.2 Korollar

Ist $\varphi : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ stetig und beschränkt, dann ist das Integral

$$\int\limits_{\mathfrak{F}} \varphi d\omega$$

absolut konvergent.

Mit Hilfe dieses Volumenelements sind wir nun in der Lage, auf $\mathbb{H}({}_1\Gamma, r, v)$ ein inneres Produkt zu definieren.

2.3 Satz

Es seien $f, g \in \mathbb{H}({}_1\Gamma, r, v)$ und $fg \in SS({}_1\Gamma, 2r, v^2)$ mit $r > 2$, und es sei ferner $\mathfrak{F}$ der Fundamentalbereich von ${}_1\Gamma$ aus 2.1.
Dann konvergiert das Integral

$$(f, g) := \int\limits_{\mathfrak{F}} f(\tau)\overline{g(\tau)}(\operatorname{Im}\tau)^r d\omega$$

absolut und hat folgende Eigenschaften:

(i) (f, g) ist bilinear.

(ii) $\overline{(f, g)} = (g, f)$.

(iii) Ist $f \in SS({}_1\Gamma, r, v)$, so gilt $(f, f) \geq 0$ und $(f, f) = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$.

(iv) $(f|_L, g|_L) = (f, g)$ für alle $L \in {}_1\Gamma$.

(v) (f, g) ist unabhängig von der Wahl des Fundamentalbereichs von ${}_1\Gamma$, d.h.

$$\int\limits_{\mathfrak{F}} f(\tau)\overline{g(\tau)}(\operatorname{Im}\tau)^{r-2}dxdy = \int\limits_{\mathfrak{F}_L} f(\tau)\overline{g(\tau)}(\operatorname{Im}\tau)^{r-2}dxdy$$

mit $\mathfrak{F}_L = L\mathfrak{F}$.

Das Integral (f, g) definiert also für $f, g \in SS({}_1\Gamma, r, v)$ ein Skalarprodukt auf $SS({}_1\Gamma, r, v)$, das sogenannte **Petersson-Skalarprodukt**.

<u>Beweis:</u>

Ist $\tau = x + iy \in \mathbb{H}$, so ist für ein $\kappa' > 0$

$$f(\tau)g(\tau) = \exp(2\pi i\kappa'\tau)\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{2\pi i n\tau},$$

da $fg \in SS({}_1\Gamma, 2r, v^2)$. Wegen $y > 0$ existiert dann ein $\alpha > 0$ mit

$$|f(\tau)g(\tau)| \leq \alpha \exp(-2\pi\kappa' y),$$

d.h. fg ist auf $\mathbb{H}$ beschränkt.

Somit ist $\int\limits_{\mathfrak{F}} f(\tau)\overline{g(\tau)}y^{r-2}dxdy$ nach Korollar 2.2 für $r > 2$ absolut konvergent, denn es wird majorisiert von dem Integral

$$\int\limits_{\mathfrak{F}} \alpha y^{r-2}\exp(-2\pi\kappa' y)dxdy \leq \alpha\int\limits_0^{\infty} y^{r-2}e^{-2\pi\kappa' y}dy = \alpha(4\pi\kappa')^{1-r}\Gamma(r-1).$$

(i)-(iii) folgen sofort aus der Definition von (f, g).

(iv) Sei $L \in {}_1\Gamma$.

Dann gilt (wegen $f, g \in \mathbb{H}({}_1\Gamma, r, v)$)

$$f|_L(\tau)\overline{g|_L(\tau)} = v(L)f(\tau)\overline{v(L)g(\tau)} = f(\tau)\overline{g(\tau)}$$

nach Satz III.1.2, woraus zusammen mit der Invarianz des Volumenelements unter $\tau \mapsto L\tau$ die Behauptung folgt.

(v) Zusammen mit dem Ergebnis aus (iv) und II.1.1 (ii) erhält man für $L \in {}_1\Gamma$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{L^{-1}\mathfrak{F}} f(\tau)\overline{g(\tau)}y^r\frac{dxdy}{y^2} &= \int\limits_{\mathfrak{F}} f(L\tau)\overline{g(L\tau)}(\operatorname{Im}L\tau)^r\frac{dxdy}{y^2} \\
&= \int\limits_{\mathfrak{F}} v(L)(L:\tau)^r f(\tau)\overline{v(L)(L:\tau)^r g(\tau)}\frac{y^r}{|L:\tau|^{2r}}\frac{dxdy}{y^2} \\
&= \int\limits_{\mathfrak{F}} f(\tau)\overline{g(\tau)}\frac{|L:\tau|^{2r}}{|L:\tau|^{2r}}y^r\frac{dxdy}{y^2} = (f, g),
\end{aligned}$$

und dies entspricht der Behauptung.

$\square$

2.4 Satz

Ist $f \in SS({}_1\Gamma, r, v)$, $r > 2$ und

$$f(\tau) = \sum_{m+\kappa>0} b_{m+\kappa}(f) e^{2\pi i(m+\kappa)\tau},$$

so gilt

$$(f, G_r(\tau, v, n+\kappa)) = \begin{cases} 2\Gamma(r-1)(4\pi(n+\kappa))^{1-r} b_{n+\kappa}(f), & \text{falls } n+\kappa > 0 \\ 0, & \text{falls } n+\kappa = 0. \end{cases}$$

<u>Beweis:</u>

Es sei $e(\tau) := e^{2\pi i(n+\kappa)\tau}$ mit $n + \kappa \geq 0$, also

$$G_r(\tau, v, n+\kappa) = \sum_{M \in \mathfrak{S}} \overline{v(M)}(e|_M)(\tau) \in \mathbb{G}({}_1\Gamma, r, v).$$

Es folgt $fG_r \in SS({}_1\Gamma, 2r, v^2)$, also existiert das Integral (f, G_r), und es gilt

$$\begin{aligned}
(f, G_r) &= \int_{\mathfrak{F}} f(\tau) \sum_{M \in \mathfrak{S}} v(M)\overline{(e|_M)(\tau)} y^{r-2} dxdy \\
&= \sum_{M \in \mathfrak{S}} \int_{\mathfrak{F}} (f|_M)(\tau)\overline{(e|_M)(\tau)} y^{r-2} dxdy \\
&\overset{\text{S.2.3 (iv),(v)}}{=} \sum_{M \in \mathfrak{S}} \int_{\mathfrak{F}_M} f(\tau)\overline{e(\tau)} y^{r-2} dxdy \\
&= 2 \int_{\mathfrak{B}} f(\tau)\overline{e(\tau)} y^{r-2} dxdy, \qquad (1)
\end{aligned}$$

wobei $\mathfrak{B} = \bigcup_{M \in \mathfrak{S}} \mathfrak{F}_M$ ist.
Die Vertauschung von Summe und Integral ist nach dem Satz von der majorisierten Konvergenz aufgrund der Beschränktheit des Produkts fG_r (vgl. die Ausführungen im Beweis von 2.3) erlaubt.
Der Faktor 2 taucht auf, da die Matrizen L und $-L$ den gleichen Beitrag zur Summe liefern.
Nun gibt es zu jedem $\tau \in \mathbb{H}$ genau ein $L \in {}_1\Gamma$ mit $L\tau \in \mathfrak{F}$, und aufgrund der Betrachtungen zur Struktur von $\mathfrak{S}$ in IV.2.3 zu L^{-1} genau ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $T^k L^{-1} \in \mathfrak{S}$.
D.h. zu jedem $\tau \in \mathbb{H}$ existiert genau ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $T^k\tau \in \mathfrak{B}$.
$\mathfrak{B}$ ist demnach ein Fundamentalbereich von

$$\{T^n \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Auch

$$\mathfrak{E} := \{\tau \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \operatorname{Re}\tau < 1, \operatorname{Im}\tau \geq 0\}$$

ist ein Fundamentalbereich dieser Untergruppe von ${}_1\Gamma$.
Es gilt also – aufgrund der Invarianz von $f(\tau)\overline{e(\tau)}y^{r-2}$ unter $\tau \mapsto T^k\tau = \tau + k$ für $k \in \mathbb{Z}$ – die Gleichung

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathfrak{B}} f(\tau)\overline{e(\tau)}y^{r-2}dxdy &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int\limits_{T^k\mathfrak{E}\cap\mathfrak{B}} f(\tau)\overline{e(\tau)}y^{r-2}dxdy \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int\limits_{\mathfrak{E}\cap T^{-k}\mathfrak{B}} f(\tau)\overline{e(\tau)}y^{r-2}dxdy \\
&= \int\limits_{\mathfrak{E}} f(\tau)\overline{e(\tau)}y^{r-2}. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Aus (1) und (2) folgt dann

$$(f, G_r) = 2\int\limits_0^\infty \int\limits_0^1 f(\tau)e^{-2\pi i(n+\kappa)\overline{\tau}}y^{r-2}dxdy$$

mit $f(\tau) = \sum_{m+\kappa>0} b_{m+\kappa}(f)e^{2\pi i(m+\kappa)\tau}$, und die Fourierkoeffizienten von f sind gegeben durch

$$b_{m+\kappa}(f) = \int\limits_0^1 f(\tau)e^{2\pi i(m+\kappa)\tau}dx.$$

Im Fall $n + \kappa = 0$ also $n = \kappa = 0$ folgt sofort $(f, G_r) = 0$, denn wegen $f \in SS({}_1\Gamma, r, v)$ ist $b_0 = 0$.
Sei also $n + \kappa > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
(f, G_r) &= 2\int\limits_0^\infty (\int\limits_0^1 f(\tau)e^{2\pi i(n+\kappa)\tau}dx)e^{2\pi i(n+\kappa)(\tau-\overline{\tau})}y^{r-2}dy \\
&= 2b_{n+\kappa}(f)\int\limits_0^\infty e^{-4\pi(n+\kappa)y}y^{r-2}dy \\
&= 2b_{n+\kappa}(f)(4\pi(n+\kappa))^{1-r}\underbrace{\int\limits_0^\infty e^{-4\pi(n+\kappa)y}(4\pi(n+\kappa)y)^{r-2}d(4\pi(n+\kappa)y)}_{=\Gamma(r-1)} \\
&= 2\cdot b_{n+\kappa}(f)(4\pi(n+\kappa))^{1-r}\Gamma(r-1)
\end{aligned}$$

mit $\Gamma(r-1) = \int\limits_0^\infty t^{r-2}e^{-t}dt$ $(t = 4\pi(n+\kappa)y)$ und $r - 1 > 1$. □

Nun sind wir in der Lage, im Fall $r > 2$ für die Vektorräume $SS({}_1\Gamma, r, v)$ bzw. $\mathbb{G}({}_1\Gamma, r, v)$ eine aus POINCARÉschen Reihen bestehende Basis anzugeben.

2.5 Satz

Ist $r > 2$, v ein MS vom Gewicht r zu ${}_1\Gamma$, und ist ferner $\mu := \dim \mathbb{G}({}_1\Gamma, r, v) > 0$, so bilden die $G_r(\tau, v, n+\kappa)$ für $n = 0, \dots, \mu - 1$ eine Basis von $\mathbb{G}({}_1\Gamma, r, v)$.

<u>BEWEIS:</u>

Nach Satz 1.4 ist nur noch zu zeigen, daß

i) die POINCARÉschen Reihen $G_r(\tau, v, n+\kappa)$ für $n \in \{0, \dots, \mu - 1\}$ mit $n + \kappa > 0$ den Vektorraum $SS({}_1\Gamma, r, v)$ erzeugen, und daß

ii) die μ Reihen $G_r(\tau, v, n+\kappa)$ für $n = 0, \dots, \mu - 1$ linear unabhängig sind.

zu i) Es sei $\mathfrak{T} \subseteq SS({}_1\Gamma, r, v)$ der von den Funktionen $G_r(\tau, v, n+\kappa) \in SS({}_1\Gamma, r, v)$ ($n \in \{0, \dots, \mu - 1\}$ mit $n + \kappa > 0$) erzeugte Unterraum von $SS({}_1\Gamma, r, v)$, $t = \dim \mathfrak{T}$ und $\{f_1, \dots, f_t\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathfrak{T}$ bezüglich des PETERSSON-Skalarprodukts, d.h.

$$(f_i, f_k) = \delta_{ik} \quad \text{für } i, k \in \{1, \dots, t\}.$$

Ferner seien $a_i := (f, f_i)$ $(i = 1, \dots, t)$ für beliebiges $f \in SS({}_1\Gamma, r, v)$. Dann gilt

$$(f - \sum_{i=1}^{t} a_i f_i) \perp f_j \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, t\}.$$

Insbesondere gilt dann für $g := f - \sum_{i=1}^{t} a_i f_i$

$$\begin{aligned} (g, G_r(\tau, v, n+\kappa)) &= 2\Gamma(r-1)(4\pi(n+\kappa))^{1-r} b_{n+\kappa}(g) \\ &= 0 \quad \text{für alle } n \in \{0, \dots, \mu - 1\} \text{ mit } n + \kappa > 0 \end{aligned}$$

nach Satz 2.4. Wegen $n + \kappa > 0$ folgt

$$b_{n+\kappa}(g) = 0 \quad \text{für alle } n \in \{0, \dots, \mu - 1\} \text{ mit } n + \kappa > 0.$$

Damit ist aber $g = f - \sum_{i=1}^{t} a_i f_i \equiv 0$ nach Satz 1.3, und es gilt $f \in \mathfrak{T}$. Man erhält demnach $\mathfrak{T} = SS({}_1\Gamma, r, v)$.

zu ii) Es sei $\mu = \dim \mathbb{G}({}_1\Gamma, r, v) > 0$.
Bilden nun die Funktionen

$$\varphi_m(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+\kappa}^{(m)} e^{2\pi i (n+\kappa)\tau}$$

für $m = 0, \dots, \mu - 1$ eine Basis von $\mathbb{G}({}_1\Gamma, r, v)$, so gilt $\det C \neq 0$ mit

$$C := (c_{n+\kappa}^{(m)})_{m,n=0,\dots,\mu-1}.$$

Denn wäre $\det C = 0$, so würden $\alpha_0, \dots, \alpha_{\mu-1} \in \mathbb{C}$ existieren, welche nicht alle verschwinden, mit

$$\sum_{m=0}^{\mu-1} \alpha_m c_{n+\kappa}^{(m)} = 0 \quad (0 \leq n \leq \mu - 1).$$

Somit wäre dann nach Satz 1.3

$$\sum_{m=0}^{\mu-1} \alpha_m \varphi_m(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{m=0}^{\mu-1} \alpha_m c_{n+\kappa}^{(m)}) e^{2\pi i(n+\kappa)\tau} = 0$$

für alle $\tau \in \mathbb{H}$, was einen Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit der φ_m herbeiführen würde.
Somit ist $\det C \neq 0$ und C^{-1} transformiert $\{\varphi_0, \ldots, \varphi_{\mu-1}\}$ in eine Basis mit der Eigenschaft

$$\varphi_m(\tau) = e^{2\pi i(m+\kappa)\tau} + \sum_{n=\mu}^{\infty} c_{n+\kappa}^{(m)} e^{2\pi i(n+\kappa)\tau} \quad (m = 0, \ldots, \mu - 1). \qquad (1)$$

Ist

$$\sum_{n=0}^{\mu-1} \alpha_n G_r(\tau, v, n+\kappa) = 0, \qquad (2)$$

so ist auch

$$\begin{aligned} 0 &= (\varphi_m(\tau), \sum_{n=0}^{\mu-1} \alpha_n G_r(\tau, v, n+\kappa)) = \sum_{n=0}^{\mu-1} \alpha_n (\varphi_m(\tau), G_r(\tau, v, n+\kappa)) \\ &= 2\Gamma(r-1)(4\pi(m+\kappa))^{1-r} \alpha_m \qquad (3) \end{aligned}$$

für jedes $m \in \{0, \ldots, \mu - 1\}$ wegen (1).
Ist $\kappa > 0$, so folgt $\alpha_m = 0$ für alle $m = 0, \ldots, \mu - 1$ aus (3), und die lineare Unabhängigkeit der G_r ist bewiesen.
Ist hingegen $\kappa = 0$, so folgt $\alpha_m = 0$ für alle $m = 1, \ldots \mu - 1$ aus (3) und $\alpha_0 \cdot G_r(\tau, v, 0) = 0$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$. Damit ist aber auch $\alpha_0 = 0$, da $G_r(\tau, v, 0) \not\equiv 0$.
Somit sind die $G_r(\tau, v, n+\kappa)$ für $n = 0, \ldots, \mu - 1$ linear unabhängig.

Aus i) und ii) folgt dann die Behauptung. □

Kapitel VI

Modulformen von negativem Gewicht

In diesem Kapitel sollen zu gegebenem $r > 2$ und MS v vom Gewicht r Modulformen von negativem Gewicht $2 - r$ zu ${}_1\Gamma$ und zum MS v^{-1} konstruiert werden.
Die Tatsache, daß diese – falls sie höchstens Pole erster Ordnung in endlich vielen Punkten im Innern des Fundamentalbereichs $\mathfrak{F}$ von ${}_1\Gamma$ und in den Punkten ρ und i besitzen – durch ihre Residuen in diesen Punkten und durch ihren Hauptteil im Unendlichen nach V.1.1 eindeutig bestimmt sind, legt es nahe, nach einem Analogon der Partialbruchzerlegung im Bereich der rationalen Funktionen zu suchen.
Als *Grundelemente* für die Konstruktion dieser Formen dienen im wesentlichen die *Partialbruchreihen* $H_r(\tau, v, z)$. Sie werden im folgenden Paragraphen definiert. Diese hängen von zwei Variablen $z, \tau \in \mathbb{H}$ ab. Wir werden uns für die Eigenschaften von H_r als Funktion von τ bei festem $z \in \mathbb{H}$ sowie als Funktion von z bei festem $\tau \in \mathbb{H}$ interessieren.
Als Funktion von τ handelt es sich bei $H_r(\tau, v, z)$ für $r > 2$ um eine Modulform vom Gewicht r zu ${}_1\Gamma$ und zum MS v. Als Fourierkoeffizienten im Unendlichen treten gewisse Fourierreihen $F_{2-r}(z, v^{-1}, m + \kappa)$ auf, welche als Funktionen von z auf $\mathbb{H}$ holomorph sind.
Aus endlich vielen der Funktionen F_{2-r} und speziellen Werten von H_r an Stellen $\tau = c_i$ $(i = 1, \dots, l)$ und $\tau = \rho, i$ werden wir später die allgemeinste Modulform vom Gewicht $2 - r < 0$ zum MS v^{-1} als Funktion von $z \in \mathbb{H}$ mit einfachen Polen in den Punkten $c_i \in \mathring{\mathfrak{F}}$, ρ und i linear mit konstanten Koeffizienten kombinieren.
Entscheidend werden hierbei die Zusammenhänge sein, welche sich aus der Vertauschung von Parameter und Argument ergeben. Durch einen analogen Prozeß wie den der Vertauschung von Parameter und Argument hängen auch, wie sich zeigen wird, die autretenden Funktionen $F_{2-r}(z, v^{-1}, m + \kappa)$ mit den Funktionen $G_r(\tau, v, -n - \kappa')$ mit $\kappa' = 1 - \kappa - [1 - \kappa]$ aus IV.1.2 zusammen. Der Fourierkoeffizient von $F_{2-r}(z, v^{-1}, m + \kappa)$ zum Exponenten $n + \kappa'$ ist mit dem von $G_r(\tau, v, -n - \kappa')$ zum Exponenten $m + \kappa$ identisch.

1 Die Partialbruchreihen $H_r(\tau, v, z)$

1.1 Definition

Es sei $v = v_{a,b}$ ein MS vom reellen Gewicht $r > 2$ zu ${}_1\Gamma$ mit $v(T) = e^{2\pi i\kappa}$ und

$$\kappa^+ := \begin{cases} \kappa & \text{für } \kappa > 0 \\ 1 & \text{für } \kappa = 0. \end{cases}$$

Ferner sei $\kappa' := 1 - \kappa^+$.

Mit diesen Bezeichnungen definiert man auf $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ die Funktion

$$H(\tau, z) = H_r(\tau, v, z) := 2\pi i e^{2\pi i\kappa' z} \sum_{M \in \mathfrak{S}} \frac{e^{2\pi i\kappa^+ M\tau}}{(e^{2\pi i M\tau} - e^{2\pi i z}) v(M)(M : \tau)^r},$$

wobei $\mathfrak{S}$ wie in der Definition der Funktionen $G_r(\tau, v, n + \kappa)$ aus IV.1.2 ein volles System von Matrizen $M \in {}_1\Gamma$ mit verschiedenen zweiten Zeilen durchläuft, welches mit M auch immer $-M$ enthält.
Wir schreiben

$$H_r(\tau, v, z) = H_r^0(\tau, v, z) + H_r^+(\tau, v, z)$$

mit

$$H_r^0(\tau, v, z) = 4\pi i \frac{e^{2\pi i\kappa' z + 2\pi i\kappa^+ \tau}}{e^{2\pi i\tau} - e^{2\pi i z}}$$

und

$$H_r^+(\tau, v, z) = 2\pi i \sum_{\substack{M \in \mathfrak{S} \\ M = \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ \gamma & * \end{smallmatrix}\right) \\ \gamma \neq 0}} \frac{e^{2\pi i\kappa' z} e^{2\pi i\kappa^+ M\tau}}{(e^{2\pi i M\tau} - e^{2\pi i z}) v(M)(M : \tau)^r}.$$

1.2 Satz

Ist $r > 2$ und $v = v_{a,b}$ ein MS vom Gewicht r zu ${}_1\Gamma$, so gilt:

i) Die Funktion $H_r(\tau, v, z)$ ist als Funktion in der Variablen τ für festes $z \in \mathbb{H}$ in $\mathbb{H} \backslash \{Mz \mid M \in {}_1\Gamma\} =: P_z$ holomorph.

   Es gilt
   $$H_r(S\tau, v, z) = v(S)(S : \tau)^r H_r(\tau, v, z)$$
   für alle $S \in {}_1\Gamma$.

ii) $H_r(\tau, v, z)$ ist als Funktion in der Variablen z bei festem $\tau \in \mathbb{H}$ holomorph auf $\mathbb{H} \backslash \{M\tau \mid M \in {}_1\Gamma\} =: P_\tau$.

iii) In den Punkten aus P_z besitzt H_r als Funktion von τ bei festem $z \in \mathbb{H}$ höchstens einfache Pole, und die Residuen bestimmen sich durch

   $$\operatorname{res}(H_r(\tau, v, z), \tau = Mz) = \epsilon(z) v(M)(M : z)^{r-2}$$

   mit

   $$\epsilon(z) = \begin{cases} 2, & \text{falls } z \text{ kein elliptischer Fixpunkt von } {}_1\Gamma \text{ ist,} \\ 4, & \text{falls } z = Li \in \mathbb{E}_2 \text{ für ein } L \in {}_1\Gamma \text{ und } b = 1, \\ 6, & \text{falls } z = L\rho \in \mathbb{E}_3 \text{ für ein } L \in {}_1\Gamma \text{ und } a = 2, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Hier gilt $\epsilon(Mz) = \epsilon(z)$ für alle $M \in {}_1\Gamma$.

iv) In den Punkten aus P_τ besitzt H_r als Funktion von z bei festem $\tau \in \mathbb{H}$ höchstens einfache Pole, und die Residuen bestimmen sich durch

$$\operatorname{res}(H_r(\tau, v, z), z = M\tau) = -\delta(\tau)\frac{1}{v(M)(M:\tau)^r}$$

mit

$$\delta(\tau) = \begin{cases} 2, & \text{falls } \tau \text{ kein elliptischer Fixpunkt von } {}_1\Gamma \text{ ist,} \\ 6, & \text{falls } \tau = L\rho \in \mathbb{E}_3 \text{ für ein } L \in {}_1\Gamma \text{ ist und } a = 0 \text{ gilt,} \\ 4, & \text{falls } \tau = Li \in \mathbb{E}_2 \text{ für ein } L \in {}_1\Gamma \text{ ist und } b = 0 \text{ gilt,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

v) Ist $\alpha_0 > 0$, $\operatorname{Im}\tau > \alpha_0$ und $\operatorname{Im} z > \frac{1}{\alpha_0}$, so besitzt $H_r(\tau, v, z)$ die Darstellungen

a)

$$H_r(\tau, v, z) = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} G_r(\tau, v, -(n+\kappa'))e^{2\pi i(n+\kappa')z} \quad (\operatorname{Im} z > \operatorname{Im}\tau)$$

und

b)

$$H_r(\tau, v, z) = 2\pi i \sum_{m+\kappa>0} F_{2-r}(z, v^{-1}, m+\kappa)e^{2\pi i(m+\kappa)\tau} \quad (\operatorname{Im}\tau > \operatorname{Im} z).$$

Hierbei ist

$$F_{2-r}(z, v^{-1}, m+\kappa) = -2e^{-2\pi i(m+\kappa)z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{r,m+\kappa}(v, -n-\kappa')e^{2\pi i(n+\kappa')z}$$

eine auf $\mathbb{H}$ holomorphe Funktion in z.

Nach i) und v) b) handelt es sich demnach bei $H_r(\tau, v, z)$ als Funktion von $\tau \in \mathbb{H}$ bei festem $z \in \mathbb{H}$ um eine Modulform vom Gewicht $r > 2$ zu ${}_1\Gamma$ und zum MS v.

<u>Beweis:</u>

i) Es reicht zu zeigen, daß die Reihe

$$H_r^+(\tau, v, z) = 2\pi i \sum_{\substack{M \in \mathfrak{S} \\ M = \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ \gamma & * \end{smallmatrix}\right) \\ \gamma \neq 0}} \frac{e^{2\pi i\kappa' z}e^{2\pi i\kappa^+ M\tau}}{(e^{2\pi i M\tau} - e^{2\pi i z})v(M)(M:\tau)^r}$$

in τ für festes $z \in \mathbb{H}$ kompakt gleichmäßig auf $\mathbb{H}\backslash P_z$ konvergiert. Dazu sei $K \subset \mathbb{H}\backslash P_z$ kompakt. Die Reihe

$$G_r^+(\tau, v, \kappa^+) = \sum_{\substack{M \in \mathfrak{S} \\ \gamma \neq 0}} \frac{e^{2\pi i\kappa^+ M\tau}}{v(M)(M:\tau)^r}$$

konvergiert dann nach Satz IV.1.3 gleichmäßig absolut auf K. Für die gleichmäßige Konvergenz von $H_r^+(\tau, v, z)$ auf K reicht es also, den Faktor $e^{2\pi i\kappa' z}(e^{2\pi i M\tau} - e^{2\pi i z})^{-1}$ auf K nach oben abzuschätzen.

Es sei also $\alpha_0 > 0$ mit $y > \alpha_0$ für alle $\tau = x + iy \in K$. Wegen Lemma II.1.1 (ii) gilt dann

$$\operatorname{Im} M\tau = \frac{y}{|\gamma\tau + \delta|^2} \leq \frac{1}{\gamma^2 y} \leq \frac{1}{\gamma^2\alpha_0} \tag{1}$$

mit $M = \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in {}_1\Gamma$, $\gamma \neq 0$, und es ist

$$\left|\frac{e^{2\pi i\kappa' z}}{e^{2\pi i M\tau} - e^{2\pi i z}}\right| \leq \frac{e^{-2\pi\kappa' \operatorname{Im} z}}{e^{-2\pi\frac{1}{\gamma^2\alpha_0}} - e^{-2\pi \operatorname{Im} z}}. \tag{2}$$

Sei $t = \operatorname{Im} z > 0$, dann existiert ein $\epsilon > 0$ mit $0 < \epsilon < t$, und für $\gamma^2 \geq \frac{1}{\alpha_0\epsilon}$ folgt

$$(2) \leq \frac{e^{-2\pi\kappa' t}}{e^{-2\pi\epsilon} - e^{-2\pi t}} =: C,$$

d.h. die Reihe H_r^+ konvergiert gleichmäßig absolut auf K mit $2\pi C \cdot G_r^+$ als konvergenter Majorante.

H_r ist dann nach dem Weierstraßschen Konvergenzsatz auf $\mathbb{H}\backslash P_z$ holomorph.

Zum Beweis der Transformationsgleichung verfährt man wie in Teil ii) des Beweises von Satz IV.1.3.

ii) Für den Beweis der kompakt gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $H_r^+(\tau, v, z)$ in z auf $\mathbb{H}\backslash P_\tau$ für festes $\tau = x + iy \in \mathbb{H}$ benutzt man die Abschätzung

$$\left|\frac{e^{2\pi i\kappa' z}}{e^{2\pi i M\tau} - e^{2\pi i z}}\right| \overset{(1)}{\leq} \frac{e^{2\pi\kappa' \operatorname{Im} z}}{e^{-2\pi\frac{1}{y}} - e^{-2\pi \operatorname{Im} z}}. \tag{3}$$

Ist nämlich $K \subset \mathbb{H}\backslash P_\tau$ kompakt, so existiert ein $\alpha_0 > 0$ mit $\operatorname{Im} z > \alpha_0$ und

$$(3) \leq \frac{e^{-2\pi\kappa'\alpha_0}}{e^{-2\pi\frac{1}{y}} - e^{-2\pi\alpha_0}},$$

und aus der absoluten Konvergenz der Reihe $G_r^+(\tau, v, \kappa^+)$ für $\tau \in \mathbb{H}$ folgt wiederum die gleichmäßig absolute Konvergenz der Reihe $H_r^+(\tau, v, z)$ auf K.

iii) Aufgrund des Faktors $(e^{2\pi i M\tau} - e^{2\pi i z})^{-1}$ liegen für $H_r(\tau, v, z)$ als Funktion von τ in den Punkten $\tau = M^{-1}z$ höchstens Pole erster Ordnung vor.

Es gilt

$$\frac{d}{d\tau}(e^{2\pi i M\tau} - e^{2\pi i z}) = \frac{2\pi i}{(M:\tau)^2} e^{2\pi i M\tau}$$

nach Lemma II.1.1 (i).

Betrachtet man nun die einzelnen Funktionsterme

$$T_M(\tau) = \frac{2\pi i e^{2\pi i\kappa' z} e^{2\pi i\kappa^+ M\tau}}{(e^{2\pi i M\tau} - e^{2\pi i z})v(M)(M:\tau)^r} = T_{-M}(\tau),$$

so besitzen diese einen einfachen Pol an der Stelle $\tau = M^{-1}z$ mit dem Residuum

$$\begin{aligned} \operatorname{res}(T_M(\tau), \tau = M^{-1}z) &= \operatorname{res}(T_{-M}(\tau), \tau = M^{-1}z) \\ &= 2\pi i \frac{e^{2\pi i\kappa' z} e^{2\pi i\kappa^+ M M^{-1} z}(M : M^{-1}z)^2}{2\pi i e^{2\pi i M M^{-1} z} v(M)(M : M^{-1}z)^r}. \end{aligned}$$

Wegen

$$(M : M^{-1}z)^r = \frac{(MM^{-1} : z)^r}{(M^{-1} : z)^r}\sigma(M, M^{-1})$$

nach Lemma II.1.2. (i) und

$$v(E) = 1 = v(M)v(M^{-1})\sigma(M, M^{-1})$$

gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{res}(T_M(\tau), \tau = M^{-1}z) &= \frac{(MM^{-1} : z)^2 v(M^{-1})\sigma(M, M^{-1})(M^{-1} : z)^r}{(MM^{-1} : z)^r (M^{-1} : z)^2} \\ &= \frac{1}{v(M)(M : z)^{r-2}}. \end{aligned}$$

Ist demnach z kein Fixpunkt der Modulgruppe, so besitzt $H_r(\tau, v, z)$ in den Punkten $\tau = M^{-1}z$ ($M \in {}_1\Gamma$) Pole erster Ordnung mit Residuum

$$R = 2v(M)^{-1}(M : z)^{2-r}.$$

Ist hingegen z ein elliptischer Fixpunkt der Modulgruppe, so erhält man die folgenden Fälle:

(a) Ist $z = L\rho \in \mathbb{E}_3$ und somit $W = LVL^{-1}$ ($V = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$) ein Erzeuger der Fixgruppe von z mit $W^3 = -E$, so kann man $\mathfrak{S}$ so wählen, daß mit M auch alle MW^k ($0 \le k \le 5$) in $\mathfrak{S}$ liegen, denn all diese Matrizen haben verschiedene zweite Zeilen.
Wäre dies nämlich nicht der Fall, so gäbe es Zahlen $k, j \in \mathbb{N}$ mit $0 \le k < k + j \le 5$, so daß nach IV.2.3 für ein geeignetes $b \in \mathbb{Z}$

$$MW^{k+j} = T^b MW^k, \quad \text{also} \quad MW^j M^{-1} = T^b$$

richtig wäre. Daraus würde aber

$$T^{6b} = MW^{6j}M^{-1} = E,$$

also $b = 0$ und somit $j = 0$ folgen, was einen Widerspruch herbeiführt.

Nach II.2.1 (4) und (6) ist

$$v(W)(W:z)^{r-2} = e^{\frac{2\pi i(a+1)}{3}}. \tag{4}$$

Für $0 \le k \le 5$ ist dann

$$\begin{aligned} v(M)(M:z)^{r-2} &= v(M)(M:W^k z)^{r-2} \\ &= \frac{v(MW^k)(MW^k:z)^{r-2}}{v(W^k)(W^k:z)^{r-2}} \\ &= \frac{v(MW^k)(MW^k:z)^{r-2}}{(v(W)(W:z)^{r-2})^k} \\ &\overset{(4)}{=} e^{-\frac{2\pi ik(a+1)}{3}} \cdot v(MW^k)(MW^k:z)^{r-2}, \end{aligned}$$

also

$$\sum_{k=0}^{5} \frac{1}{v(MW^k)(MW^k:z)^{r-2}} = \frac{1}{v(M)(M:z)^{r-2}} \sum_{k=0}^{5} e^{-\frac{2\pi ik(a+1)}{3}}$$

mit $a \in \{0,1,2\}$.
Für die Summe auf der rechten Seite hat man

$$\sum_{k=0}^{5} \exp(-\frac{2\pi ik(a+1)}{3}) = \begin{cases} 6, & \text{falls } a = 2, \\ 0, & \text{falls } a \ne 2, \end{cases}$$

d.h. der Pol in $\tau = M^{-1}z = M^{-1}L\rho$ hebt sich im Fall $a \ne 2$ heraus, wohingegen H_r im Fall $a = 2$ einen Pol erster Ordnung in $\tau = M^{-1}z$ mit Residuum

$$R = 6v(M)^{-1}(M:z)^{2-r}$$

besitzt.

(b) Ist $z = Li \in \mathbb{E}_2$ und somit $W = LJL^{-1}$ ($J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$) ein Erzeuger der Fixgruppe von z mit $W^2 = -E$, so kann man wieder (wie schon in (a)) $\mathfrak{S}$ so wählen, daß mit M auch alle MW^k ($0 \le k \le 3$) in $\mathfrak{S}$ liegen.
Nach II.2.1 (4) und (6) ist

$$v(W)(W:z)^{r-2} = e^{\frac{2\pi i}{2}(b+1)},$$

und mit denselben Berechnungen wie in (a) erhält man

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{1}{v(MW^k)(MW^k:z)^{r-2}} = \begin{cases} \frac{4}{v(M)(M:z)^{r-2}}, & \text{falls } b = 1, \\ 0, & \text{falls } b = 0. \end{cases}$$

Die obigen Betrachtungen liefern dann

$$\operatorname{res}(H_r(t,v,z),\tau = Mz) = \epsilon(z)v(M)(M:z)^{r-2}$$

mit

$$\epsilon(z) = \begin{cases} 2, & \text{falls } z \text{ kein elliptischer Fixpunkt von } {}_1\Gamma \text{ ist,} \\ 6, & \text{falls } z = L\rho \text{ für ein } L \in {}_1\Gamma \text{ und } a = 2, \\ 4, & \text{falls } z = Li \text{ für ein } L \in {}_1\Gamma \text{ und } b = 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

was die Behauptung war. Die Aussage $\epsilon(z) = \epsilon(Lz)$ $(L \in {}_1\Gamma)$ erhält man aus den Identitäten $v(LVL^{-1}) = v(V)$ und $v(LJL^{-1}) = v(J)$ in II.2.1 (5).

iv) Für die Berechnung der Residuen in den Punkten $z = M\tau$ von $H_r(\tau, v, z)$ als Funktion von z bei festem $\tau \in \mathbb{H}$ verfährt man wie in iii).
Man erhält

$$\begin{aligned} \operatorname{res}(T_M(\tau), z = M\tau) &= \frac{2\pi i e^{2\pi i\kappa' M\tau} e^{2\pi i\kappa^+ M\tau}}{-2\pi i e^{2\pi i M\tau} v(M)(M:\tau)^r} \\ &= -\frac{1}{v(M)(M:\tau)^r} = \operatorname{res}(T_{-M}(\tau), z = M\tau). \end{aligned}$$

Ist τ kein Fixpunkt von ${}_1\Gamma$, so hat $H_r(\tau, v, z)$ als Funktion von z analog zu iii) in den Punkten $z = M\tau$ Pole erster Ordnung mit Residuum

$$R = -2v(M)^{-1}(M:\tau)^{-r}.$$

(a) Ist $\tau = L\rho \in \mathbb{E}_3$ für ein $L \in {}_1\Gamma$ ein elliptischer Fixpunkt von ${}_1\Gamma$ und $W = LVL^{-1}$, so ist nach II.2.1 (6)

$$v(W)(W:\tau)^r = e^{\frac{2\pi i}{3}a}.$$

Das Residuum von H_r an der Stelle $z = M\tau$ verschwindet also im Falle $a \neq 0$ und hat für $a = 0$ den Wert

$$R = -6v(M)^{-1}(M:\tau)^{-r}$$

mit derselben Begründung wie in iii) (a).

(b) Ist $\tau = Li \in \mathbb{E}_2$ für ein $L \in {}_1\Gamma$ und $W = LJL^{-1}$, so erhält man analog, daß das Residuum an der Stelle $z = M\tau$ für $b \neq 0$ verschwindet, für $b = 0$ hingegen den Wert

$$R = -4v(M)^{-1}(M:\tau)^{-r}$$

hat.

Das Ergebnis läßt sich dann wie folgt zusammenfassen:

$$\operatorname{res}(H_r(\tau,v,z), z = M\tau) = -\delta(\tau)\frac{1}{v(M)(M:\tau)^r}$$

mit

$$\delta(\tau) = \begin{cases} 2, & \text{falls } \tau \text{ kein elliptischer Fixpunkt von } {}_1\Gamma \text{ ist,} \\ 6, & \text{falls } \tau = L\rho \text{ für ein } L \in {}_1\Gamma \text{ ist und } a = 0 \text{ gilt,} \\ 4, & \text{falls } \tau = Li \text{ für ein } L \in {}_1\Gamma \text{ ist und } b = 0 \text{ gilt,} \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Auch in diesem Fall kann man $\delta(z) = \delta(Lz)$ $(L \in {}_1\Gamma)$ aus II.2.1 (5) folgern.

v) Es seien $\tau = x + iy,\ z = \sigma + it \in \mathbb{H}$, und es sei $\alpha_0 > 0$ gegeben mit $y > \alpha_0$, $t > \frac{1}{\alpha_0}$.
Dann folgt aus i) (1)

$$\operatorname{Im} M\tau < \frac{1}{\alpha_0} < t \quad \text{für alle } M \in {}_1\Gamma,$$

also

$$|e^{2\pi i(z-M\tau)}| = e^{-2\pi(t-\operatorname{Im} M\tau)} < 1. \tag{5}$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned}
H_r^+(\tau,v,z) &= 2\pi i \sum_{\substack{M\in\mathfrak{S}\\ \gamma\neq 0}} \frac{e^{2\pi i(\kappa' z + \kappa^+ M\tau)}}{(e^{2\pi i M\tau} - e^{2\pi i z})v(M)(M:\tau)^r} \\
&= 2\pi i \sum_{\substack{M\in\mathfrak{S}\\ \gamma\neq 0}} \frac{e^{2\pi i(\kappa' z + (\kappa^+-1) M\tau)}}{(1 - e^{2\pi i(z-M\tau)})v(M)(M:\tau)^r} \\
&\overset{\text{geo. Rh. wg. (5)}}{=} 2\pi i \sum_{\substack{M\in\mathfrak{S}\\ \gamma\neq 0}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(n(z-M\tau) + (1-\kappa^+)z + (\kappa^+-1)M\tau)}}{v(M)(M:\tau)^r} \\
&= 2\pi i \sum_{\substack{M\in\mathfrak{S}\\ \gamma\neq 0}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(n+\kappa')(z-M\tau)}}{v(M)(M:\tau)^r} \\
&= 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{\substack{M\in\mathfrak{S}\\ \gamma\neq 0}} \frac{e^{2\pi i(-(n+\kappa'))M\tau}}{v(M)(M:\tau)^r}}_{=G_r^+(\tau,v,-(n+\kappa'))} e^{2\pi i(n+\kappa')z} \\
&= 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} G_r^+(\tau,v,-(n+\kappa'))e^{2\pi i(n+\kappa')z}.
\end{aligned}$$

Aus Korollar IV.2.5 erhält man, daß $H_r^+(\tau, v, z)$ die Darstellung

$$H_r^+(\tau, v, z) = 2\pi i \sum_{\substack{m+\kappa>0 \\ n\geq 0}} a_{r,m+\kappa}(v, -n-\kappa')e^{2\pi i(m+\kappa)\tau+2\pi i(n+\kappa')z} \tag{6}$$

zuläßt, wobei die Reihe majorisiert wird von der Reihe mit den Gliedern

$$b_{mn} = C(r)(m+\kappa)^{r-1}e^{-2\pi(m+\kappa)y-2\pi(n+\kappa')t+4\pi\sqrt{(m+\kappa)(n+\kappa')}} = C(r)(m+\kappa)^{r-1}e^{c_{mn}}.$$

Hierbei ist

$$c_{mn} = -2\pi((m+\kappa)(y-\alpha_0)+(n+\kappa')(t-\frac{1}{\alpha_0})+\left(\sqrt{(m+\kappa)\alpha_0} - \sqrt{(n+\kappa')\frac{1}{\alpha_0}}\right)^2).$$

Demnach ist die Reihe (6) auf $y \geq \alpha_0 + \epsilon$, $t \geq \frac{1}{\alpha_0} + \epsilon$ ($\epsilon > 0$) gleichmäßig absolut konvergent, kann also beliebig umgeordnet werden.

a) Ist jetzt zusätzlich noch $t > y$ erfüllt, so ist $|e^{2\pi i(z-\tau)}| < 1$ und

$$\begin{aligned} H_r^0(\tau, v, z) &= 4\pi i \frac{e^{2\pi i\kappa' z+2\pi i\kappa^+\tau}}{e^{2\pi i\tau}(1-e^{2\pi i(z-\tau)})} \\ &\overset{\text{geo.Rh.}}{=} 4\pi i e^{2\pi i\kappa'(z-\tau)}\sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi i n(z-\tau)} \\ &= 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} 2e^{2\pi i(-n-\kappa')\tau}e^{2\pi i(n+\kappa')z}, \end{aligned}$$

also

$$H_r(\tau, v, z) = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} G_r(\tau, v, -(n+\kappa'))e^{2\pi i(n+\kappa')z}$$

mit

$$G_r(\tau, v, -(n+\kappa')) = 2e^{2\pi i(-n-\kappa')\tau} + \sum_{m+\kappa>0} a_{r,m+\kappa}(v, -n-\kappa')e^{2\pi i(m+\kappa)\tau}$$

in den Bezeichnungen von Satz IV.2.4.

b) Im Fall $y > t$ ist $|e^{2\pi i(\tau-z)}| < 1$ und

$$\begin{aligned} H_r^0(\tau, v, z) &= 4\pi i \frac{e^{2\pi i\kappa' z+2\pi i\kappa^+\tau}}{-e^{2\pi i z}(1-e^{2\pi i(\tau-z)})} \\ &\overset{\text{geo.Rh.}}{=} -4\pi i e^{2\pi i\kappa^+(\tau-z)}\sum_{m=0}^{\infty} e^{2\pi i m(\tau-z)} \\ &= 2\pi i \sum_{m=0}^{\infty} -2e^{2\pi i(m+\kappa^+)(\tau-z)} \\ &= 2\pi i \sum_{m+\kappa>0} -2e^{-2\pi i(m+\kappa)z}e^{2\pi i(m+\kappa)\tau} \end{aligned}$$

wegen

$$\kappa^+ = \begin{cases} \kappa, & \text{falls } \kappa > 0 \\ 1, & \text{falls } \kappa = 0. \end{cases}$$

Nach (6) hat $H_r(\tau, v, z)$ für hinreichend große $y = \operatorname{Im} \tau$, nämlich $y > \operatorname{Im} Mz$ für alle $M \in {}_1\Gamma$, eine Darstellung als Fourierreihe im Unendlichen der Form

$$H_r(\tau, v, z) = 2\pi i \sum_{m+\kappa>0} F_{2-r}(z, v^{-1}, m+\kappa) e^{2\pi i(m+\kappa)\tau}$$

mit

$$\begin{aligned} F_{2-r}(z, v^{-1}, m+\kappa) &= -2e^{-2\pi i(m+\kappa)z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{r,m+\kappa}(v, -n-\kappa') e^{2\pi i(n+\kappa')z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 H_r(\tau, v, z) e^{-2\pi i(m+\kappa)\tau} dx \end{aligned}$$

nach der Formel für die Fourierkoeffizienten.
Die Funktion $H_r(\tau, v, z)$ ist demnach als Funktion von τ für hinreichend große $y = \operatorname{Im} \tau$ holomorph, somit folgt aus der Integraldarstellung auch die Holomorphie von $F_{2-r}(z, v^{-1}, m+\kappa)$ als Funktion von $z \in \mathbb{H}$.

□

2 Der Hauptsatz über Modulformen von negativem Gewicht

Zu gegebenem $r > 2$, einem MS v vom Gewicht r und beliebigen Punkte c_i $(i = 1, \dots, l)$ im Innern des Fundamentalbereichs $\mathfrak{F}$ von ${}_1\Gamma$ soll in diesem Abschnitt eine Modulform vom Gewicht $2 - r < 0$ zu ${}_1\Gamma$ und zum MS v^{-1} konstruiert werden, welche höchstens Pole erster Ordnung in den Punkten c_i $(i = 1, \dots, l)$ und in den elliptischen Fixpunkten $\rho := e^{\frac{2\pi i}{3}}$ und i der Modulgruppe besitzt.
Zu diesem Zweck bildet man eine Linearkombination aus den auf $\mathbb{H}$ holomorphen Funktionen $F_{2-r}(z, v^{-1}, m + \kappa)$ und den Werten der Funktionen $H_r(\tau, v, z)$ an den Stellen $\tau = c_i$ $(i = 1, \dots, l)$, $\tau = \rho$ und $\tau = i$.
Die Existenz einer Modulform $f \in \mathbb{M}({}_1\Gamma, 2-r, v^{-1})$ mit einfachen Polen in der oberen Halbebene ist jedoch an einige Bedingungen geknüpft, welche Gegenstand der folgendeen Untersuchungen sein werden.
Wir fassen zunächst die notwendigen Bedingungen zusammen, welche sich aus der Existenz einer solchen Funktion ergeben, welche Pole erster Ordnung in der oberen Halbebene besitzt.
Eine besondere Rolle kommt dabei den elliptischen Fixpunkten der Modulgruppe zu.

2.1 Lemma

Aus der Existenz einer Modulform $f \in \mathbb{M}({}_1\Gamma, 2-r, v_{a,b}^{-1})$, welche in $\zeta_0 = Li \in \mathbb{E}_2$ (bzw. $\zeta_0 = L\rho \in \mathbb{E}_3$) $(L \in {}_1\Gamma)$ einen Pol erster Ordnung besitzt, folgt notwendig $a = 0$ (bzw. $b = 0$).
Dies sieht man so ein:
Es sei für ein $c \neq 0$

$$f(\tau) = \frac{c}{(\tau - \zeta_0)} + P(\tau - \zeta_0),$$

wobei $P(\tau - \zeta_0)$ eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt ζ_0 bezeichne. Ist nun W ein Erzeuger der Fixgruppe von ζ_0, also $W\zeta_0 = \zeta_0$, so gilt

$$(W\tau - W\zeta_0) = \frac{\tau - \zeta_0}{(W : \zeta_0)(W : \tau)}.$$

Daraus folgt zum einen

$$\begin{aligned} f(W\tau) &= \frac{c}{(W\tau - W\zeta_0)} + P(W\tau - W\zeta_0) \\ &= \frac{c(W : \zeta_0)(W : \tau)}{(\tau - \zeta_0)} + P(W\tau - W\zeta_0). \end{aligned} \tag{1}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} f(W\tau) &= v^{-1}(W)(W : \tau)^{2-r} f(\tau) \\ &= \frac{cv^{-1}(W)(W : \tau)^{2-r}}{(\tau - \zeta_0)} + v^{-1}(W)(W : \tau)^{2-r} P(\tau - \zeta_0). \end{aligned} \tag{2}$$

Mit (1) und (2) erhält man

$$\lim_{\tau\to\zeta_0}(\tau-\zeta_0)f(W\tau)=c(W:\zeta_0)^2=cv^{-1}(W)(W:\zeta_0)^{2-r}. \tag{3}$$

Ist $v=v_{a,b}$ ein MS vom Gewicht $r>2$ zu ${}_1\Gamma$, so folgt aus (3) und II.2.1 (6), daß

$$\begin{aligned}\frac{1}{v(W)(W:L\rho)^r} &= e^{-\frac{2\pi i}{3}a}=1 \text{ bzw.}\\ \frac{1}{v(W)(W:Li)^r} &= e^{-\frac{2\pi i}{2}b}=1,\end{aligned}$$

also $a=0$ bzw. $b=0$ gelten muß, je nachdem, ob ein Fixpunkt der Ordnung 2 oder 3 vorliegt.

Weitere Bedingungen – notwendige und hinreichende – an die Existenz einer solchen Modulform aus $\mathbb{M}({}_1\Gamma,2-r,v_{a,b}^{-1})$ ergeben sich aus einer Untersuchung der Funktionen $f\in\mathbb{M}({}_1\Gamma,2,1)$.

2.2 Satz

Eine Funktion $f\in\mathbb{M}({}_1\Gamma,2,1)$ habe endlich viele Pole $c_1,\ldots,c_l$ im Innern des Fundamentalbereichs $\mathfrak{F}$ von ${}_1\Gamma$, und mit Ausnahme höchstens der Punkte i und ρ sei f auf dem Rand von $\mathfrak{F}$ holomorph.
Es sei ferner

$$f(\tau)=\sum_{n=m}^{\infty}b_n(f)e^{2\pi in\tau}\quad(m\in\mathbb{Z})$$

die Fourier-Entwicklung von f im Unendlichen.
Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i}b_0(f)+\frac{1}{2}\mathrm{res}(f,i)+\frac{1}{3}\mathrm{res}(f,\rho)+\sum_{i=1}^{l}\mathrm{res}(f,c_i)=0.$$

<u>Beweis:</u>

Es sei $\eta>0$ so gewählt, daß $\mathrm{Im}\,c_i<\eta$ für $i=1,\ldots,l$. Integriert man nun f über den in Abbildung 1 beschriebenen Weg $\gamma=\sum_{k=1}^{8}\gamma_k$, wobei die Kreisbögen γ_4,γ_6 und γ_8 so gewählt seien, daß alle Singularitäten von f im Innern von γ liegen, so erhält man aus dem Residuensatz

$$\int_\gamma f(\tau)d\tau=2\pi i\sum_{i=1}^{l}\mathrm{res}(f,c_i).$$

Ist δ ein Weg, der ganz im Holomorphiegebiet von f verläuft, und $f\in\mathbb{M}({}_1\Gamma,2,1)$, so gilt

$$\int_\delta f(\tau)d\tau=\int_{M\delta}f(\tau)d\tau$$

für alle $M \in {}_1\Gamma$ wegen Lemma II.1.1 (i).
Seien $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $V = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dann gilt

$$-\int\limits_{\gamma_1} f(\tau)d\tau = \int\limits_{T^{-1}\gamma_3} f(\tau)d\tau = \int\limits_{\gamma_3} f(\tau)d\tau,$$

und

$$-\int\limits_{\gamma_7} f(\tau)d\tau = \int\limits_{J\gamma_7} f(\tau)d(\tau) = \int\limits_{\gamma_5} f(\tau)d\tau,$$

woraus

$$2\pi i \sum_{i=1}^{l} \operatorname{res}(f, c_i) = \sum_{k=1}^{4} \int\limits_{\gamma_{2k}} f(\tau)d\tau$$

folgt.
Es sei $\gamma_2(s) = -s + i\eta$ für $s \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
Ist nun

$$f(\tau) = \sum_{n=m}^{\infty} b_n(f)e^{2\pi i n\tau} = \sum_{n=m}^{\infty} b_n(f)t^n =: F(t)$$

mit $t = e^{2\pi i\tau}$. Dann gilt $dt = 2\pi i e^{2\pi i\tau}d\tau$ und γ_1 wird nach der Substitution $\tau \mapsto t$ in einen Kreis mit Radius $\delta = e^{-2\pi\eta}$ um 0 transformiert, welcher negativ durchlaufen wird.
Es ist also

$$\int\limits_{\gamma_2} f(\tau)d\tau = -\int\limits_{K_\delta(0)} \frac{1}{2\pi i}\frac{F(t)}{t}dt \overset{\text{CIF}}{=} -b_0(f).$$

Zu den Integralen über γ_4 und γ_8 betrachte man den Weg $\gamma^* := T^{-1}\gamma_8 + \gamma_4$. Es beschreibt $\gamma^* + V\gamma^* + V^2\gamma^*$ einen Kreis um ρ, der im Uhrzeigersinn durchlaufen wird, somit folgt

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{\gamma_4} f(\tau)d\tau + \int\limits_{\gamma_8} f(\tau)d\tau\right) = \frac{1}{6\pi i}\int\limits_{\gamma^*} f(\tau)d\tau = -\frac{1}{3}\operatorname{res}(f, \rho)$$

nach dem Residuensatz.
Analog sieht man, daß der Weg $\gamma_6 + J\gamma_6$ einen Kreis um i beschreibt, der im Uhrzeigersinn durchlaufen wird. Demnach ist

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_6} f(\tau)d\tau = -\frac{1}{2}\operatorname{res}(f, i).$$

Faßt man diese Ergebnisse zusammen, so erhält man die Gleichung

$$\frac{1}{2\pi i}b_0 + \frac{1}{2}\operatorname{res}(f, i) + \frac{1}{3}\operatorname{res}(f, \rho) + \sum_{i=1}^{l} \operatorname{res}(f, c_i) = 0.$$

□

Abbildung 1

Aus diesem Satz erhält man nun eine notwendige Bedingung für die Existenz einer Form $F \in \mathbb{M}({}_1\Gamma, 2-r, v^{-1})$ mit den oben angesprochenen Eigenschaften.

2.3 Korollar

Es sei $r > 2$, $v = v_{a,b}$ ein MS vom Gewicht r zu ${}_1\Gamma$ und $F \in \mathbb{M}({}_1\Gamma, 2-r, v^{-1})$ mit endlich vielen einfachen Polen $c_1, \ldots, c_l$ im Innern des Fundamentalbereichs $\mathfrak{F}$ von ${}_1\Gamma$ und – mit Ausnahme von ρ und i, in denen auch Pole erster Ordnung liegen dürfen – keinen Polen auf dem Rand von $\mathfrak{F}$. Ferner sei $\varphi \in SS({}_1\Gamma, r, v)$.

Für $N \in \mathbb{Z}$, $n_0 \geq -1$ und hinreichend großes $y = \operatorname{Im} \tau$ habe F nach III.2.1 (M3) die Darstellung

$$
\begin{aligned}
F(\tau) &= \sum_{n=N}^{\infty} b_{n-\kappa}(F) e^{2\pi i(n-\kappa)\tau} \\
&= \sum_{0<n+\kappa\leq n_0+\kappa} b_{-n-\kappa}(F) e^{2\pi i(-n-\kappa)\tau} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+\kappa'}(F) e^{2\pi i(n+\kappa')\tau},
\end{aligned}
$$

mit

$$
n_0 = \begin{cases} 0, & \text{falls } \kappa = 0, \\ -1, & \text{falls } \kappa > 0, \end{cases}
$$

im Falle, daß F im Unendlichen holomorph ist. Sei weiterhin

$$
\varphi(\tau) = \sum_{n+\kappa>0} b_{n+\kappa}(\varphi) e^{2\pi i(n+\kappa)\tau}
$$

die Fourierentwicklung von φ im Unendlichen.
Dann folgt

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \sum_{0<n+\kappa\leq n_0+\kappa} b_{-n-\kappa}(F) b_{n+\kappa}(\varphi) + \sum_{i=1}^{l} \operatorname{res}_{c_i}(F)\varphi(c_i) \\
+ \quad & \frac{1}{3}\operatorname{res}(F,\rho)\varphi(\rho) + \frac{1}{2}\operatorname{res}(F,i)\varphi(i) = 0. \quad (*)
\end{aligned}
$$

<u>Beweis:</u>
Es gilt $f := F\varphi \in \mathbb{M}({}_1\Gamma, 2, 1)$, und f hat im Unendlichen eine Fourierentwicklung der Form

$$
f(\tau) = \sum_{n=m}^{\infty} b_n(F\varphi) e^{2\pi i n\tau}
$$

mit einem $m \in \mathbb{Z}$.
Wendet man Satz 2.2 auf dieses f an, so erhält man

$$
\frac{1}{2\pi i} b_0(F\varphi) + \sum_{i=1}^{l} \operatorname{res}(F\varphi, c_i) + \frac{1}{3}\operatorname{res}(F\varphi,\rho) + \frac{1}{2}\operatorname{res}(F\varphi, i) = 0.
$$

Ein Koeffizientenvergleich und die Tatsache, daß F in den Punkten c_i, ρ und i höchstens Pole erster Ordnung besitzt, liefert die Gleichung

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi i} \sum_{0<n+\kappa\leq n_0+\kappa} b_{-n-\kappa}(F) b_{n+\kappa}(\varphi) + \sum_{i=1}^{l} \operatorname{res}(F,c_i)\varphi(c_i) \\
+ \quad & \frac{1}{3}\operatorname{res}(F,\rho)\varphi(\rho) + \frac{1}{2}\operatorname{res}(F,i)\varphi(i) = 0.
\end{aligned}
$$

□

Wie aus dem nun folgenden *Hauptsatz über Modulformen von negativem Gewicht* hervorgeht, erweist sich das Bestehen der Gleichung $(*)$ aus 2.3 für alle $\varphi \in SS({}_1\Gamma, r, v)$ nicht nur als notwendig für die Existenz einer Modulform $F \in \mathbb{M}({}_1\Gamma, 2-r, v^{-1})$ sondern auch als hinreichend.

2.4 Hauptsatz über Modulformen von negativem Gewicht

Es sei $v = v_{a,b}$ ein Multiplikatorsystem vom reellen Gewicht $r > 2$ zur Modulgruppe ${}_1\Gamma$ mit $v(T) = e^{2\pi i\kappa}$.

a) Man bilde mit willkürlich vorgegebenen komplexen Konstanten

$$\lambda_{n+\kappa}\ (0 < n+\kappa \leq n_0+\kappa,\ n_0 \in \mathbb{Z},\ n_0 \geq -1),\ \rho_k\ (1 \leq k \leq l,\ l \geq 0),\ \rho_1',\ \rho_2'$$

und willkürlich vorgegebenen paarweise verschiedenen Punkten c_i $(i = 1, \dots, l)$ im Innern des Fundamentalbereichs $\mathfrak{F}$ von ${}_1\Gamma$ die Funktion

$$\begin{aligned}\Lambda(z) \quad = \quad & \sum_{0<n+\kappa\leq n_0+\kappa} \lambda_{n+\kappa} F_{2-r}(z, v^{-1}, n+\kappa) + \sum_{i=1}^{l} \rho_i H_r(c_i, v, z) \\ & + \rho_1' \frac{1-\operatorname{sgn}(a)}{3} H_r(\rho, v, z) + \rho_2' \frac{1-b}{2} H_r(i, v, z).\end{aligned}$$

Dann ist Λ eine in $\mathbb{H}$ bis auf höchstens einfache Pole in den Punkten Mc_i, Mi und $M\rho$ $(M \in {}_1\Gamma)$ holomorphe Funktion von z, welche im Unendlichen den Hauptteil

$$h_\Lambda(z) = \sum_{0<n+\kappa\leq n_0+\kappa} (-2)\lambda_{n+\kappa} e^{2\pi i(-n-\kappa)z}$$

besitzt.

b) Ist $\mu' = \dim SS({}_1\Gamma, r, v) > 0$ und κ^+ wie in 1.1, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\Lambda(z) \in \mathbb{M}({}_1\Gamma, 2-r, v^{-1})$.

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \sum_{0<n+\kappa\leq n_0+\kappa} \lambda_{n+\kappa} a_{r,n+\kappa}(v, m+\kappa^+) + \sum_{i=1}^{l} \rho_i G_r(c_i, v, m+\kappa^+) \\ + \quad & \frac{1-\operatorname{sgn}(a)}{3} \rho_1' G_r(\rho, v, m+\kappa^+) + \frac{1-b}{2} \rho_2' G_r(i, v, m+\kappa^+) = 0\end{aligned}$$

für $m = 0, \dots, \mu'-1$.

b') Ist $\mu' = 0$, so ist $\Lambda(z) \in \mathbb{M}({}_1\Gamma, 2-r, v^{-1})$.

c) Es sei $F(z) \in \mathbb{M}({}_1\Gamma, 2-r, v^{-1})$ mit endlich vielen höchstens einfachen Polen im Innern des Fundamentalbereichs $\mathfrak{F}$ von ${}_1\Gamma$ und in den Punkten ρ bzw. i.

Dann fällt F mit einer durch sie eindeutig bestimmten Linearkombination $\Lambda(z)$ zusammen, indem man nur die Übereinstimmung der Hauptteile $h_F(z)$ und $h_\Lambda(z)$ im Unendlichen und der Residuen von F und Λ in den Punkten im Innern von $\mathfrak{F}$ sowie in ρ und i fordert.

d) Es sei $F \in \mathbb{M}({}_1\Gamma, 2-r, v^{-1})$ mit einer Fourierreihendarstellung

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=N}^{\infty} b_{n-\kappa}(F) e^{2\pi i(n-\kappa)z} \\ &= \sum_{0<n+\kappa\leq n_0+\kappa} b_{-n-\kappa}(F) e^{2\pi i(-n-\kappa)z} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+\kappa'}(F) e^{2\pi i(n+\kappa')z}, \end{aligned}$$

im Unendlichen. Dann gilt für alle $m \geq 0$ die Formel

$$\begin{aligned} b_{m+\kappa'}(F) &= -\frac{1}{2} \sum_{0<n+\kappa\leq n_0+\kappa} b_{-n-\kappa}(F) a_{r,n+\kappa}(v, -m-\kappa') \\ &\quad -\pi i \sum_{i=1}^{l} \operatorname{res}(F, c_i) G_r(c_i, v, -m-\kappa') \\ &\quad -\pi i \frac{1-\operatorname{sgn}(a)}{3} \operatorname{res}(F, \rho) G_r(\rho, v, -m-\kappa') \\ &\quad -\pi i \frac{1-b}{2} \operatorname{res}(F, i) G_r(i, v, -m-\kappa'). \end{aligned}$$

<u>Beweis:</u>

a) Bildet man mit beliebigen Zahlen $\lambda_{n+\kappa}, \rho_i, \rho_1', \rho_2' \in \mathbb{C}$ und $c_1, \ldots, c_l \in \mathring{\mathfrak{F}}$ die Linearkombination

$$\begin{aligned} \Lambda(z) &= \sum_{0<n+\kappa\leq n_0+\kappa} \lambda_{n+\kappa} F_{2-r}(z, v^{-1}, n+\kappa) + \sum_{i=1}^{l} \rho_i H_r(c_i, v, z) \\ &\quad + \rho_1' \frac{1-\operatorname{sgn}(a)}{3} H_r(\rho, v, z) + \rho_2' \frac{1-b}{2} H_r(i, v, z), \end{aligned}$$

so ist diese Funktion nach Satz 1.2 ii) in der oberen Halbebene bis auf mögliche einfache Pole in den Punkten $z = Mc_i$, $z = Mi$ und $z = M\rho$ ($M \in {}_1\Gamma$) holomorph und besitzt nach Satz 1.2 iv) b) für hinreichend großes $t = \operatorname{Im} z$ eine Fourierentwicklung im Unendlichen mit dem Hauptteil

$$h_\Lambda(z) = \sum_{0<n+\kappa\leq n_0+\kappa} (-2)\lambda_{n+\kappa} e^{2\pi i(-n-\kappa)z}.$$

Die Faktoren $1-\operatorname{sgn}(a)$ und $1-b$ sollen nach Lemma 2.1 gewährleisten, daß die zugehörigen Summanden nur dann auch wirklich auftreten, wenn die notwendige Bedingung ($a = 0$ bzw. $b = 0$) für die Existenz einer Form aus $\mathbb{M}({}_1\Gamma, 2-r, v_{a,b}^{-1})$ mit einfachen Polen in ρ bzw. i erfüllt ist.

Die Residuen von $\Lambda(z)$ haben dann nach Satz 1.2 iv) die Werte $-2\rho_i$ in den c_i ($i = 1, \dots, l$), $-2(1-\operatorname{sgn}(a))\rho_1'$ in ρ und $-2(1-b)\rho_2'$ in i.

Man definiert nun für festes $z \in \mathbb{H}$, $M \in {}_1\Gamma$ eine Funktion $\Omega_r(\tau, v, z; M)$ in $\tau \in \mathbb{H}$ durch

$$\Omega_r(\tau, v, z; M) := H_r(\tau, v, Mz) - v(M)^{-1}(M:z)^{2-r}H_r(\tau, v, z). \tag{1}$$

Nach Satz 1.2 i) hat $\Omega_r(\tau, v, z; M)$ in den Punkten $\tau = LMz$ ($L \in {}_1\Gamma$) höchstens Pole erster Ordnung mit den zugehörigen Residuen

$$\begin{aligned} & \epsilon(Mz)v(L)(L:Mz)^{r-2} - \epsilon(z)v(LM)(LM:z)^{r-2}v(M)^{-1}(M:z)^{2-r} \\ = \; & \epsilon(z)\left(v(L)(L:Mz)^{r-2} - \frac{v(L)\sigma(L,M)(LM:z)^{r-2}}{(M:z)^{r-2}}\right) \\ = \; & 0. \end{aligned}$$

Diese Tatsache folgt aus Satz 1.2 iii), Lemma II.1.1 (iii) sowie II.1.2 (i).

Da die $H_r(\tau, v, z)$ nach Satz 1.2 i) als Funktionen von τ höchstens **einfache** Pole in den Punkten $\tau = LMz$ ($L \in {}_1\Gamma$) haben, *ist* demnach $\Omega_r(\tau, v, z; M)$ holomorph auf $\mathbb{H}$.

$\Omega_r(\tau, v, z; M)$ besitzt nach Satz 1.2 v) b) eine Fourierentwicklung der Form

$$\Omega_r(\tau, v, z; M) = \sum_{n+\kappa>0} b_{n+\kappa}(\Omega_r)e^{2\pi i(n+\kappa)\tau}$$

mit

$$\begin{aligned} b_{n+\kappa}(\Omega_r(\tau, v, z; M)) &= \int_0^1 H_r(\tau, v, Mz)e^{-2\pi i(n+\kappa)\tau}dx \\ &\quad -\frac{v(M)^{-1}}{(M:z)^{r-2}}\int_0^1 H_r(\tau, v, z)e^{-2\pi i(n+\kappa)\tau}dx \qquad (2) \\ &= 2\pi i(F_{2-r}(Mz, v^{-1}, n+\kappa) \\ &\quad -v^{-1}(M)(M:z)^{2-r}F_{2-r}(z, v^{-1}, n+\kappa)) \end{aligned}$$

für $n + \kappa > 0$.

Es handelt sich also zusammenfassend, da sich die Transformationsgleichung der H_r auf die Ω_r überträgt, bei $\Omega_r(\tau, v, z; M)$ für jedes feste $M \in {}_1\Gamma$ und $z \in \mathbb{H}$ als Funktion von τ um eine ganze Spitzenform zur Modulgruppe vom Gewicht r und zum MS v.

b) Sei $\mu' = \dim SS({}_1\Gamma, r, v) > 0$.

"(i) $\Rightarrow$ (ii)" Ist $\Lambda(z) \in \mathbb{M}({}_1\Gamma, 2-r, v^{-1})$, so ist $\Lambda(z)\cdot\varphi(z) \in \mathbb{M}({}_1\Gamma, 2, 1)$ für jedes $\varphi \in SS({}_1\Gamma, r, v)$. Die Gleichung

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \sum_{0<n+\kappa\leq n_0+\kappa} (-2)\lambda_{n+\kappa} b_{n+\kappa}(\varphi) + \sum_{i=1}^{l} (-2)\rho_i \varphi(c_i) \\ + \quad & (-2)\frac{1-\operatorname{sgn}(a)}{3}\rho_1'\varphi(\rho) + (-2)\frac{1-b}{2}\rho_2'\varphi(i) = 0 \end{aligned}$$

folgt dann aus Korollar 2.3.
Sie besteht im Fall $\mu' > 0$ auch für die Basis $\{G_r(\tau, v, m+\kappa^+)\}_{m=0,\dots,\mu'-1}$ von $SS({}_1\Gamma, r, v)$ aus Satz V.2.5, was wiederum in den Bezeichnungen von Satz IV.2.4 der Gleichung (ii) entspricht.

"(ii) $\Rightarrow$ (i)" Gilt nun (ii), so besteht diese Gleichung insbesondere für die Funktionen $\Omega_r(\tau, v, z; M) \in SS({}_1\Gamma, r, v)$ $(M \in {}_1\Gamma,\ z \in \mathbb{H})$, was besagt, daß

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \sum_{0<n+\kappa\leq n_0+\kappa} \lambda_{n+\kappa} b_{n+\kappa}(\Omega_r(\tau, v, z; M)) + \sum_{i=1}^{l} \rho_i \Omega_r(c_i, v, z; M) \\ & + \frac{1-\operatorname{sgn}(a)}{3}\rho_1'\Omega_r(\rho, v, z; M) + \frac{1-b}{2}\rho_2'\Omega_r(i, v, z; M) \\ \overset{(1),(2)}{=} \quad & \Lambda(Mz) - v(M)^{-1}(M:z)^{2-r}\Lambda(z) = 0 \end{aligned}$$

für alle $M \in {}_1\Gamma$ und alle $z \in \mathbb{H}$ richtig ist.
Zusammen mit den Aussagen aus a) über die Fourierentwicklung folgt daraus $\Lambda(z) \in \mathbb{M}({}_1\Gamma, 2-r, v^{-1})$, und die Behauptung ist bewiesen.

b') Ist $\mu' = 0$, so ist $\Omega_r(\tau, v, z; M) \equiv 0$ für alle $M \in {}_1\Gamma$, d.h.

$$\begin{aligned} 0 \quad = \quad & \frac{1}{2\pi i} \sum_{0<n+\kappa\leq n_0+\kappa} \lambda_{n+\kappa} b_{n+\kappa}(\Omega_r(\tau, v, z; M)) + \sum_{i=1}^{l} \rho_i \Omega_r(c_i, v, z; M) \\ & + \frac{1-\operatorname{sgn}(a)}{3}\rho_1'\Omega_r(\rho, v, z; M) + \frac{1-b}{2}\rho_2'\Omega_r(i, v, z; M) \\ \overset{(1),(2)}{=} \quad & \Lambda(Mz) - v(M)^{-1}(M:z)^{2-r}\Lambda(z) \end{aligned}$$

für alle $M \in {}_1\Gamma,\ z \in \mathbb{H}$.
Mit a) folgt erneut $\Lambda(z) \in \mathbb{M}({}_1\Gamma, 2-r, v^{-1})$.

c) Sei $F(z) \in \mathbb{M}({}_1\Gamma, 2-r, v^{-1})$ mit höchstens einfachen Polen in den Punkten ρ, i und den $c_i \in \mathring{\mathfrak{F}}$ mit den zugehörigen Residuen $\operatorname{res}(F, c_i) = -2\rho_i$ $(i = 1, \dots, l)$, $\operatorname{res}(F, \rho) = -2(1-\operatorname{sgn}(a))\rho_1'$ und $\operatorname{res}(F, i) = -2(1-b)\rho_2'$. Ferner habe F für genügend großes $t = \operatorname{Im} z$ eine Fourierentwicklung im Unendlichen mit dem Hauptteil $h_F(z) = h_\Lambda(z)$ wie in a) vorgegeben. Dann folgt daraus mit Korollar 2.3, angewandt auf F und die Basis $\{G_r(\tau, v, m+\kappa^+\}_{m=0,\dots,\mu'-1}$ von $SS({}_1\Gamma, r, v)$, die Gültigkeit von

$$\begin{array}{ll} & \frac{1}{2\pi i} \sum_{0<n+\kappa\leq n_0+\kappa} \lambda_{n+\kappa} a_{r,n+\kappa}(v, m+\kappa^+) + \sum_{i=1}^{l} \rho_i G_r(c_i, v, m+\kappa^+) \\ + & \frac{1-\operatorname{sgn}(a)}{3} \rho_1' G_r(\rho, v, m+\kappa^+) + \frac{1-b}{2} \rho_2' G_r(i, v, m+\kappa^+) = 0 \end{array}$$

für $m = 0, \dots, \mu' - 1$ im Fall $\mu' > 0$.
Somit ist auch die von F ausgehend gebildete Form $\Lambda(z)$ nach b) ein Element von $\mathbb{M}({}_1\Gamma, 2-r, v^{-1})$.
Dies ist aber nach b') auch dann der Fall, wenn $\mu' = 0$ ist.
Es gilt dann

$$F(z) - \Lambda(z) \in \mathbb{G}({}_1\Gamma, 2-r, v^{-1}).$$

Wegen $2 - r < 0$ liefert Bemerkung V.1.2 die Tatsache $F(z) - \Lambda(z) \equiv 0$, da außer 0 keine ganzen Modulformen von negativem Gewicht existieren. Λ ist also durch F eindeutig bestimmt.

d) Aus a) und c) folgt für F die Darstellung

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{0<n+\kappa\leq n_0+\kappa} (-\frac{1}{2}) b_{-n-\kappa}(F) F_{2-r}(z, v^{-1}, n+\kappa) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{l} (-\frac{1}{2}) \operatorname{res}(F, c_i) H_r(c_i, v, z) \\ &\quad + (-\frac{1}{2}) \frac{1-\operatorname{sgn}(a)}{3} \operatorname{res}(F, \rho) H_r(\rho, v, z) \\ &\quad + (-\frac{1}{2}) \frac{1-b}{2} \operatorname{res}(F, i) H_r(i, v, z) \end{aligned}$$

für hinreichend großes $t = \operatorname{Im} z$.
Für die Koeffizienten $b_{m+\kappa'}(F)$ liefert Satz 1.2 v) a) und b) dann nach einem Koeffizientenvergleich die Formel

$$\begin{aligned} b_{m+\kappa'}(F) &= -\frac{1}{2} \sum_{0<n+\kappa\leq n_0+\kappa} b_{-n-\kappa}(F) a_{r,n+\kappa}(v, -m-\kappa') \\ &\quad -\pi i \sum_{i=1}^{l} \operatorname{res}(F, c_i) G_r(c_i, v, -m-\kappa') \\ &\quad -\pi i \frac{1-\operatorname{sgn}(a)}{3} \operatorname{res}(F, \rho) G_r(\rho, v, -m-\kappa') \\ &\quad -\pi i \frac{1-b}{2} \operatorname{res}(F, i) G_r(i, v, -m-\kappa') \end{aligned}$$

für alle $m \geq 0$, denn

$$\begin{aligned} H_r(\tau, v, z) &= 2\pi i \sum_{m=0}^{\infty} G_r(\tau, v, -m-\kappa') e^{2\pi i(m+\kappa')z} \quad \text{und} \\ F_{2-r}(z, v^{-1}, n+\kappa) &= -2e^{-2\pi i(n+\kappa)z} + \sum_{m=0}^{\infty} a_{r,n+\kappa}(v, -m-\kappa') e^{2\pi i(m+\kappa')z}. \end{aligned}$$

□

Gegenstand der folgenden Untersuchungen werden die Elemente von $\mathbb{H}({}_1\Gamma, 2-r, v^{-1})$ zu gegebenem $r > 2$ und MS v vom Gewicht r sein. In diesem Fall, wo es sich um auf $\mathbb{H}$ holomorphe Modulformen handelt, vereinfacht sich dementsprechend (wegen $\rho_i = \rho_1' = \rho_2' = 0$ für $i = 1, \ldots, l$ in Satz 2.4) die Formel für die Fourierkoeffizienten, und auch die Bedingungen an die Existenz einer solchen auf $\mathbb{H}$ holomorphen Modulform von negativem Gewicht werden übersichtlicher.
Wir wollen den *Hauptsatz über Modulformen von negativem Gewicht* noch einmal für diesen Spezialfall formulieren.

2.5 Satz

Es seien $r > 2$ und v ein Multiplikatorsystem vom Gewicht r zu ${}_1\Gamma$ mit $v(T) = e^{2\pi i\kappa}$.

a) Die mit komplexen Konstanten $\lambda_{n+\kappa}$ $(0 < n+\kappa \leq n_0+\kappa,\ n_0 \in \mathbb{Z},\ n_0 \geq -1)$ gebildete Funktion

$$\Lambda(z) = \sum_{0<n+\kappa\leq n_0+\kappa} \lambda_{n+\kappa} F_{2-r}(z, v^{-1}, n+\kappa)$$

ist ein Element von $\mathbb{H}({}_1\Gamma, 2-r, v^{-1})$ mit dem Hauptteil

$$h_\Lambda(z) = \sum_{0<n+\kappa\leq n_0+\kappa} (-2)\lambda_{n+\kappa} e^{2\pi i(-n-\kappa)z}$$

im Unendlichen, falls $\mu' = \dim SS({}_1\Gamma, r, v) = 0$ gilt, oder wenn im Fall $\mu' > 0$ die Bedingung

$$\sum_{0<n+\kappa\leq n_0+\kappa} \lambda_{n+\kappa} a_{r,n+\kappa}(v, m+\kappa^+) = 0 \quad (*)$$

für $m = 0, \ldots, \mu'-1$ erfüllt ist.

b) Ist $\mu' > 0$ und $\Lambda(z) \in \mathbb{H}({}_1\Gamma, 2-r, v^{-1})$, so folgt

$$\sum_{0<n+\kappa\leq n_0+\kappa} \lambda_{n+\kappa} a_{r,n+\kappa}(v, m+\kappa^+) = 0.$$

c) Ist $F \in \mathbb{H}({}_1\Gamma, 2-r, v^{-1})$, so fällt F mit einer durch sie eindeutig bestimmten Linearkombination $\Lambda(z)$ zusammen, indem man nur die Übereinstimmung der Hauptteile $h_F(z)$ und $h_\Lambda(z)$ im Unendlichen fordert.

d) Schreibt man

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=N}^{\infty} b_{n-\kappa}(F) e^{2\pi i(n-\kappa)z} \\ &= \sum_{0<n+\kappa\leq n_0+\kappa} b_{-n-\kappa}(F) e^{2\pi i(-n-\kappa)z} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+\kappa'}(F) e^{2\pi i(n+\kappa')z}, \end{aligned}$$

so gilt für alle $m \geq 0$ die Formel

$$b_{m+\kappa'}(F) = \sum_{0<n+\kappa\leq n_0+\kappa} \left(-\frac{1}{2}\right) b_{-n-\kappa}(F) a_{r,n+\kappa}(v, -m-\kappa')$$

mit den

$$a_{r,n+\kappa}(v, -m-\kappa')$$

aus Satz IV.2.4.

Kapitel VII

Das klassische Partitionenproblem

1 Die Partitionenanzahl $p(n)$

Ein grundlegendes Problem der additiven analytischen Zahlentheorie ist es, eine gegebene positive ganze Zahl durch eine Summe von positiven ganzen Zahlen aus einer vorgegebenen endlichen oder unenedlichen Menge $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ auszudrücken.
Jede Darstellung von n als Summe von Elementen aus A heißt dann eine **Partition** oder **Zerlegung von** n. Man interessiert sich nun für die zahlentheoretische Funktion $A(n)$, welche die Anzahl der möglichen Partitionen von n zählt.
In der additiven analytischen Zahlentheorie benutzt man zu deren Untersuchung die sogenannten erzeugenden Funktionen

$$F(x) = \prod_{m \in A} (1 - x^m)^{-1}$$

eines gegebenen Partitionenproblems.
Im speziellen Fall $A = \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, dem sogenannten *klassischen Partitionenproblem*, führt dieser Zugang auf die Funktion

$$F(x) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^m)^{-1},$$

welche im folgenden genauer untersucht werden soll.

1.1 Definition (Partitionenanzahl)

Es sei $n \geq 1$. Dann zählt die Partitionsfunktion $p(n)$ die Anzahl der Zerlegungen von n in positive ganze Zahlen $\leq n$. Die Anzahl der Summanden unterliegt dabei keiner Beschränkung, Wiederholungen sind erlaubt, und die Reihenfolge der Summanden spielt keine Rolle, d.h. $8 + 9$ und $9 + 8$ werden als dieselbe Zerlegung der Zahl 17 betrachtet.
Es gilt z.B. $p(4) = 5$, $p(10) = 42$ und $p(17) = 297$.

1.2 Satz

Die Funktion $F(x) = \prod_{m=1}^{\infty}(1 - x^m)^{-1}$ ist auf $\mathbb{E}$ holomorph und stellt eine erzeugende Funktion der Partitionsfunktion $p(n)$ dar, d.h. es gilt

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n \quad \text{für } |x| < 1,$$

wenn man $p(0) := 1$ setzt.

<u>Beweis:</u>

s. [1], S.308, Theorem 14.2. $\square$

1.3 Korollar

Für $\tau \in \mathbb{H}$ gilt

$$\begin{aligned}\eta^{-1}(\tau) &= e^{-2\pi i \frac{1}{24}\tau} + \sum_{n=0}^{\infty} p(n+1) e^{2\pi i (n+\frac{23}{24})\tau} \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty} p(n+1) e^{2\pi i (n+\frac{23}{24})\tau}\end{aligned}$$

mit $p(0) := 1$.

<u>BEWEIS:</u>

Es gilt

$$\eta^{-1}(\tau) = e^{-\frac{\pi i}{12}\tau} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n \tau})^{-1}.$$

Setzt man $x := e^{2\pi i \tau}$, so ist $|x| < 1$ für $\tau \in \mathbb{H}$, und nach Satz 1.2 gilt

$$\eta^{-1}(\tau) = x^{-\frac{1}{24}} \sum_{n=0}^{\infty} p(n) x^n$$

mit $p(0) := 1$, also

$$\eta^{-1}(\tau) = e^{-2\pi i \frac{1}{24}\tau} + \sum_{n=0}^{\infty} p(n+1) e^{2\pi i (n+\frac{23}{24})\tau},$$

was die Behauptung war. □

2 Die Formel von Rademacher

Im Jahre 1918 zeigten G. H. HARDY und S. RAMANUJAN mit der Formel

$$p(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{K_\delta(0)} \frac{F(x)}{x^{n+1}} dx \quad (0 < \delta < 1)$$

für die Fourierkoeffizienten von F aus Satz 1.2 die asymptotische Formel

$$p(n) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \sum_{1 \le k \le \alpha\sqrt{n}} A_k(n) \sqrt{k} \frac{d}{dn} \left(\frac{\exp(\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}(n-\kappa)})}{\sqrt{n-\kappa}} \right) + \mathcal{O}(n^{-\frac{1}{4}}),$$

wobei $\kappa = \frac{1}{24}$ und α eine beliebige positive Zahl ist.
Die Werte $A_k(n)$ sind für $n, k \ge 1$ gegeben durch

$$A_k(n) = \sum_{\substack{0 \le \delta < k \\ (\delta,k)=1}} e^{\pi i s(\delta,k) - 2\pi i n \frac{\delta}{k}}.$$

Hierbei ist

$$s(\delta, k) := \sum_{r=1}^{k-1} (\frac{r}{k} - \frac{1}{2})(\frac{r\delta}{k} - [\frac{r\delta}{k}] - \frac{1}{2})$$

für teilerfremde ganze Zahlen δ, k mit $k > 0$ die DEDEKINDsche Summe, welche auch in der Transformationsformel der DEDEKINDschen η-Funktion auftritt.
Diese Formel erhielten sie unter Zuhilfenahme der sogenannten FAREY-dissection des Kreises $K_\delta(0)$. (vgl. die Ausführungen in [5], S. 75-115)
D. H. LEHMER zeigte allerdings im Jahre 1937, daß die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k}\frac{d}{dn}\left(\frac{\exp(\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}(n-\kappa)})}{\sqrt{n-\kappa}}\right)$$

divergiert. (s. [7], S.171-176)
Eine Darstellung von $p(n)$ durch eine absolut konvergente Reihe konnte erst H. RADEMACHER angeben. Er bewies – ebenfalls im Jahre 1937 – die Formel

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k}\frac{d}{dn}\left(\frac{\sinh\left(\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}(n-\frac{1}{24})}\right)}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}}\right) \tag{1}$$

mit den wie oben definierten Werten $A_k(n)$.
Er zeigte ferner, daß man dieselbe asymptotische Formel erhält wie schon HARDY und RAMANUJAN zuvor, indem man die Reihe nach dem Glied $[\alpha\sqrt{n}]$ abbricht.
(s. [16], S.251ff.)
Hierzu benutzte er ebenfalls die Methode der FAREY-dissection. H. S. ZUCKERMAN bestimmte im Jahre 1940 ebenfalls mit ihrer Hilfe die Fourierkoeffizienten von Modulformen von negativem Gewicht, welche im Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$ der Modulgruppe bis auf einfache Pole in seinem Innern holomorph sind. (s. [23])
Die Herleitung des Hauptsatzes über Modulformen von negativem Gewicht in der vorliegenden Arbeit unterscheidet sich zwar methodisch von der Vorgehensweise RADEMACHERS bzw. ZUCKERMANS, führt aber im Fall $\rho_1' = \rho_2' = 0$ auf eine dem Theorem 1 und 2 in [23], S. 141/44 entsprechende Formel.
Im Fall des klassischen Partitionenproblems treten die gesuchten Zahlen $p(n)$ als Fourierkoeffizienten einer nach Satz III.4.1 und Korollar 1.3 auf $\mathbb{H}$ holomorphen Modulform vom Gewicht $-\frac{1}{2}$ zur Modulgruppe und zum MS v_η^{-1} auf.
Kennt man also die Parameter des Problems, d.h. wie in diesem Fall das Gewicht, das MS v_η und den Hauptteil der Funktion in ∞, so erhält man aus Satz VI.2.5 eine explizite Formel für die Partitionenanzahl $p(n)$.

3 Die Anwendung des Hauptsatzes über Modulformen von negativem Gewicht auf das klassische Partitionenproblem

3.1 Bestimmung der Parameter

Bei der Funktion η^{-1} handelt es sich nach den Aussagen in I.2 und nach Korollar 1.3 um ein Element des Vektorraums $\mathbb{H}({}_1\Gamma, -\frac{1}{2}, v_\eta^{-1})$.
In den Bezeichnungen von Satz VI.2.5 ist also $r = \frac{5}{2} > 2$ und $\kappa = \frac{1}{24}$.
Faßt man v_η als MS vom Gewicht $\frac{5}{2}$ zu ${}_1\Gamma$ auf, so gilt $a = 2$ und $b = 1$ aufgrund der Aussagen $v_\eta(J) = e^{\frac{\pi i}{4}}$ und $v_\eta(V) = e^{\frac{\pi i}{6}}$ aus I.2.
Aus Korollar V.1.5 folgt dann

$$\mu' = \dim SS({}_1\Gamma, \frac{5}{2}, v_\eta) = \frac{5}{24} - \frac{1}{24} - \frac{16}{24} - \frac{12}{24} + 1 = 0.$$

Weiterhin gilt $\kappa' = \frac{23}{24}$, $n_0 = 0$ und $\lambda_{\frac{1}{24}} = -\frac{1}{2}$ nach Korollar 1.3.
Wegen Satz VI.2.5 a) ist die mit diesen Parametern gebildete Funktion

$$\Lambda(z) = -\frac{1}{2} F_{-\frac{1}{2}}(z, v_\eta^{-1}, \frac{1}{24})$$

ein Element von $\mathbb{H}({}_1\Gamma, -\frac{1}{2}, v_\eta^{-1})$ mit dem Hauptteil

$$h_\Lambda(z) = e^{-2\pi i \frac{1}{24} z}$$

im Unendlichen.
Für die Partitionenanzahl $p(n)$ erhält man dann nach Satz VI.2.5 d) die Formel

$$p(n+1) = b_{n+\frac{23}{24}}(\eta^{-1}) = -\frac{1}{2} a_{\frac{5}{2}, \frac{1}{24}}(v_\eta, -n - \frac{23}{24}) \quad (n \geq 0)$$

bzw.

$$p(n) = -\frac{1}{2} a_{\frac{5}{2}, \frac{1}{24}}(v_\eta, -n + \frac{1}{24}) \quad (n \geq 1). \tag{2}$$

Es ist nun nur noch zu zeigen, daß diese Formel auch mit der methodisch völlig anders hergeleiteten Formel 2 (1) von Rademacher übereinstimmt.

3.2 Satz

Für alle $n \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} p(n) &= -\frac{1}{2} a_{\frac{5}{2}, \frac{1}{24}}(v_\eta, -n + \frac{1}{24}) \\ &= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{\gamma=1}^{\infty} A_\gamma(n) \sqrt{\gamma} \frac{d}{dn} \left(\frac{\sinh\left(\frac{\pi}{\gamma}\sqrt{\frac{2}{3}(n - \frac{1}{24})}\right)}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}} \right). \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$A_\gamma(n) = \sum_{\substack{0\le\delta<\gamma\\(\delta,\gamma)=1}} e^{\pi i s(\delta,\gamma)-2\pi i n\frac{\delta}{\gamma}}$$

für $n \geq 1$.

<u>Beweis:</u>

Wegen 3.1 und Satz IV.2.4 läßt sich die Partitionenanzahl $p(n)$ darstellen durch

$$\begin{aligned} p(n) &= -\frac{1}{2}a_{\frac{5}{2},\frac{1}{24}}(v_\eta, -n+\frac{1}{24}) \qquad (1)\\ &= -2\pi e^{-\frac{5}{4}\pi i}\left(\frac{1}{24(n-\frac{1}{24})}\right)^{\frac{3}{4}}\sum_{\gamma=1}^{\infty}\frac{W_\gamma(\frac{1}{24},v_\eta,-n+\frac{1}{24})}{\gamma}I_{\frac{3}{2}}(\frac{4\pi}{\gamma}\sqrt{\frac{1}{24}(n-\frac{1}{24})}) \end{aligned}$$

für $n \geq 1$.

Es seien nun W_γ und C_γ für $\gamma \geq 1$ definiert durch

$$W_\gamma := -e^{-\frac{5}{4}\pi i}W_\gamma(\frac{1}{24}, v_\eta, -n+\frac{1}{24})$$

und

$$C_\gamma := \frac{2\pi}{\gamma}I_{\frac{3}{2}}(\frac{4\pi}{\gamma}\sqrt{\frac{1}{24}(n-\frac{1}{24})})\left(\frac{1}{24(n-\frac{1}{24})}\right)^{\frac{3}{4}}.$$

Zeigt man nun

$$W_\gamma = A_\gamma(n) = \sum_{\substack{0\le\delta<\gamma\\(\delta,\gamma)=1}} e^{\pi i s(\delta,\gamma)-2\pi i n\frac{\delta}{\gamma}} \qquad (2)$$

und

$$C_\gamma = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\sqrt{\gamma}\frac{d}{dn}\left(\frac{\sinh(\frac{\pi}{\gamma}\sqrt{\frac{2}{3}(n-\frac{1}{24})})}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}}\right) \qquad (3)$$

für $\gamma \geq 1$, so folgt daraus zusammen mit (1) die Darstellung 2 (1) für die Partitionsfunktion.

zu (2): Mit $r = \frac{5}{2}$ gilt nach II.2.1 (ii) und II.2.2 (vi) mit $L = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ im Fall $\gamma > 0$ die Gleichung

$$(*) \quad \overline{v_\eta}(L) = e^{\frac{5}{2}\pi i}v_\eta(\tilde{L}) = e^{\frac{5}{2}\pi i}v(\left(\begin{smallmatrix}-\alpha & \beta\\ \gamma & -\delta\end{smallmatrix}\right)).$$

Ist S_γ ein vollständiges System von zu γ teilerfremden Zahlen $0 \leq \delta < \gamma$, so gilt

$$\begin{aligned}
W_\gamma &= -e^{-\frac{5}{4}\pi i} \sum_{\substack{\delta\in S_\gamma \\ \alpha\delta\equiv 1 \bmod \gamma}} \overline{v_\eta}((\begin{smallmatrix}\alpha & * \\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}))e^{\frac{2\pi i}{\gamma}(\frac{1}{24}\alpha+(-n+\frac{1}{24})\delta)} \\
&\overset{(*)}{=} -e^{\frac{5}{4}\pi i} \sum_{\substack{\delta\in S_\gamma \\ \alpha\delta\equiv 1 \bmod \gamma}} v_\eta((\begin{smallmatrix}-\alpha & * \\ \gamma & -\delta\end{smallmatrix}))e^{\frac{2\pi i}{\gamma}(\frac{1}{24}\alpha+(-n+\frac{1}{24})\delta)} \\
&\overset{\text{I.2}}{=} e^{\frac{\pi i}{4}} \sum_{\substack{\delta\in S_\gamma \\ \alpha\delta\equiv 1 \bmod \gamma}} e^{\pi i(\frac{-\alpha-\delta}{12\gamma}+s(\delta,\gamma)-\frac{1}{4})+\frac{2\pi i}{\gamma}(\frac{1}{24}\alpha-n\delta+\frac{1}{24}\delta)} \\
&= \sum_{\substack{\delta\in S_\gamma \\ \alpha\delta\equiv 1 \bmod \gamma}} e^{\frac{2\pi i}{\gamma}(-\frac{1}{24}\alpha+\frac{\gamma\cdot s(\delta,\gamma)}{2}+\frac{1}{24}\alpha-n\delta-\frac{1}{24}\delta+\frac{1}{24}\delta)} \\
&= \sum_{\delta\in S_\gamma} e^{\pi i s(\delta,\gamma)-2\pi i n\frac{\delta}{\gamma}} \\
&= A_\gamma(n),
\end{aligned}$$

was die Gleichung (2) beweist.

zu (3): Es seien $\alpha, r > 0,\ n \geq 1$ und $\kappa \in [0,1[$. Dann gilt mit $u := \alpha(n-\kappa)^{\frac{1}{2}} > 0$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dn}\left(\frac{I_r(u)}{(n-\kappa)^{\frac{r}{2}}}\right) &= u\cdot\alpha^r\cdot\frac{\alpha}{2}(n-\kappa)^{-\frac{1}{2}}\frac{d}{udu}\left(\frac{I_r(u)}{u^r}\right) \\
&= \frac{\alpha^{r+2}}{2}\frac{d}{udu}\left(\frac{I_r(u)}{u^r}\right) \\
&\overset{\text{I.3 (b)}}{=} \frac{\alpha}{2(n-\kappa)^{\frac{r+1}{2}}} I_{r+1}(u).
\end{aligned}$$

Mit $r = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\pi}{\gamma}$ $(\gamma \geq 1)$ und $\kappa = \frac{1}{24}$ erhält man

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{I_{\frac{1}{2}}(\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\pi}{\gamma}(n-\frac{1}{24})^{\frac{1}{2}})}{(n-\frac{1}{24})^{\frac{1}{4}}}\right) = \frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\pi}{2\gamma} I_{\frac{3}{2}}(\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\pi}{\gamma}(n-\frac{1}{24})^{\frac{1}{2}})\frac{1}{(n-\frac{1}{24})^{\frac{3}{4}}}.$$

Weiterhin ist

$$I_{\frac{1}{2}}(\frac{\sqrt{\frac{2}{3}}\pi}{\gamma}(n-\frac{1}{24})^{\frac{1}{2}}) = \frac{\sqrt{2}\gamma^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}(\frac{2}{3})^{\frac{1}{4}}\sqrt{\pi}(n-\frac{1}{24})^{\frac{1}{4}}}\sinh(\frac{\pi}{\gamma}\sqrt{\frac{2}{3}(n-\frac{1}{24})})$$

nach I.3 (a).

Mit $C := \frac{\pi}{\gamma}\sqrt{\frac{2}{3}(n-\frac{1}{24})}$ folgt dann

$$\begin{aligned} I_{\frac{3}{2}}(C) &= \frac{d}{dn}\left(\frac{\sinh(C)}{(n-\frac{1}{24})^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{2\sqrt{2}\gamma^{\frac{3}{2}}}{\pi^2(\frac{2}{3})^{\frac{3}{4}}}(n-\frac{1}{24})^{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{d}{dn}\left(\frac{\sinh(C)}{(n-\frac{1}{24})^{\frac{1}{2}}}\right)\frac{2\sqrt{2}\gamma^{\frac{3}{2}}}{\pi^2}\left(\frac{(n-\frac{1}{24})3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}, \end{aligned}$$

und daraus

$$\begin{aligned} C_\gamma &= \frac{4\pi\sqrt{2}\gamma^{\frac{3}{2}}}{\gamma\pi^2}(\frac{1}{16})^{\frac{3}{4}}\frac{d}{dn}\left(\frac{\sinh(C)}{(n-\frac{1}{24})^{\frac{1}{2}}}\right) \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{8\pi}\sqrt{\gamma}\frac{d}{dn}\left(\frac{\sinh(C)}{(n-\frac{1}{24})^{\frac{1}{2}}}\right). \end{aligned}$$

Damit ist (3) gezeigt.

Aus den Identitäten (2) und (3) folgt nun, daß die Formel

$$p(n) = -\frac{1}{2}a_{\frac{5}{2},\frac{1}{24}}(v_\eta, -n+\frac{1}{24})$$

genau der RADEMACHERschen Darstellung 2 (1) (vgl. auch [16], S.251) entspricht. □

4 Spezielle Ergänzungen

Ist $r = \frac{r_0}{2} > 2$ mit einem $r_0 \in \mathbb{N}$ wie im obigen Fall, so kann man genauere Aussagen über die Formen $F \in \mathbb{H}({}_1\Gamma, 2-r, v^{-1})$ treffen, indem man die Eigenschaften der in III.4.1 eingeführten Funktionen ausnutzt.

4.1 Proposition

Es seien $r = \frac{r_0}{2} > 2$, $r_0 \in \mathbb{N}$, $v = v_{a,b}$ ein MS zu ${}_1\Gamma$ vom Gewicht r und

$$f_{r,a,b}(\tau) := \eta^{4-2r}(\tau)J_{2-a,1-b}(\tau)$$

mit

$$J_{\alpha,\beta}(\tau) := \left(\frac{3g_2(\tau)}{4\pi^4\eta^8(\tau)}\right)^\alpha \cdot \left(\frac{27g_3(\tau)}{8\pi^6\eta^{12}(\tau)}\right)^\beta$$

für $\tau \in \mathbb{H}$ und $\alpha \in \{0,1,2\}$, $\beta \in \{0,1\}$.

Dann gilt $f_{r,a,b} \in \mathbb{H}({}_1\Gamma, 2-r, v^{-1})$, und die Fourierkoeffizienten von $f_{r,a,b}(\tau)$ sind ganze Zahlen.

Ist κ^+ wie in VI.1.1 definiert, so ist

$$\operatorname{ord}(f_{r,a,b},\infty) = -\mu' - \kappa^+$$

mit $\mu' = \dim SS({}_1\Gamma, r, v_{a,b})$.
Zu jeder Form $F \in \mathbb{H}({}_1\Gamma, 2-r, (v_{a,b})^{-1})$ existiert dann ein $P \in \mathbb{C}[X]$ mit

$$F(\tau) = f_{r,a,b}(\tau) P(J_0(\tau)).$$

Hierbei ist J_0 die Funktion aus III.4.

<u>Beweis:</u>

Aufgrund der Darstellungen

$$12^3 J(\tau) = J_0(\tau) = \frac{12^3 g_2^3(\tau)}{(2\pi)^{12}\eta^{24}(\tau)}$$

und

$$J_0(\tau) - 12^3 = \frac{12^3 27 g_3^2(\tau)}{(2\pi)^{12}\eta^{24}(\tau)},$$

welche sich aus III.4 ergeben, sind die Funktionen

$$J_{\alpha,0}(\tau) := (J_0)^{\frac{\alpha}{3}} = \left(\frac{3g_2(\tau)}{4\pi^4\eta^8(\tau)}\right)^{\alpha}$$

und

$$J_{0,\beta}(\tau) = (J_0 - 12^3)^{\frac{\beta}{2}} = \left(\frac{27g_3(\tau)}{8\pi^6\eta^{12}(\tau)}\right)^{\beta}$$

für $\tau \in \mathbb{H}$ wohldefiniert.
Sie haben ganze Fourier-Koeffizienten, da die Fourier-Koeffizienten von η^{-1}, $\frac{3}{4\pi^4}g_2$ und $\frac{27}{8\pi^6}g_3$ nach Korollar 1.3 und Satz III.4.1 b) ganze Zahlen sind.
$J_{\alpha,\beta}$ erfüllt für $\alpha \in \{0,1,2\},\ \beta \in \{0,1\}$ wegen I.2 und III.4.1 c) die Transformationsgleichung

$$J_{\alpha,\beta}(S\tau) = J_{\alpha,0}(S\tau)J_{0,\beta}(S\tau) = (v_\eta(S))^{-8\alpha-12\beta}J_{\alpha,\beta}(\tau)$$

mit

$$(v_\eta(J))^{-8\alpha-12\beta} = e^{-2\pi i\alpha-3\pi i\beta} = e^{\pi i\beta}$$

und

$$(v_\eta(V))^{-8\alpha-12\beta} = e^{-\frac{4\pi i}{3}\alpha-2\pi i\beta} = e^{\frac{2\pi i}{3}\alpha}.$$

Aus der Existenz einer Fourierdarstellung im Unendlichen und der Holomorphie der vorkommenden Funktionen auf $\mathbb{H}$ folgt somit

$$J_{\alpha,\beta} \in \mathbb{H}({}_1\Gamma, 0, v_{\alpha,\beta}).$$

Es sei nun $r = \frac{r_0}{2} > 2$ mit $r_0 \in \mathbb{N}$ und

$$f_{r,a,b}(\tau) := \eta^{4-2r}(\tau)J_{2-a,1-b}(\tau).$$

Da $4-2r$ eine negative ganze Zahl ist, hat auch $f_{r,a,b}$ ganzzahlige Fourierkoeffizienten und erfüllt die Transformationsgleichungen

$$f_{r,a,b}(J\tau) = (v_\eta(J))^{4-2r}(J:\tau)^{2-r}e^{\frac{2\pi i}{2}(1-b)}f_{r,a,b}(\tau)$$

und

$$f_{r,a,b}(V\tau) = (v_\eta(V))^{4-2r}(V:\tau)^{2-r}e^{\frac{2\pi i}{3}(2-a)}f_{r,a,b}(\tau).$$

Es gilt

$$(v_\eta(J))^{4-2r}e^{\frac{2\pi i}{2}(1-b)} = e^{-\frac{\pi i r}{2}-\frac{2\pi i}{2}b}$$

und

$$(v_\eta(V))^{4-2r}e^{\frac{2\pi i}{3}(2-a)} = e^{-\frac{\pi i}{3}r-\frac{2\pi i}{3}a},$$

woraus

$$f_{r,a,b}(\tau) \in \mathbb{H}({}_1\Gamma, 2-r, v_{a,b}^{-1})$$

folgt.
Aus der Darstellung der Funktion η^{-1} in Korollar 1.3 liest man ferner

$$\operatorname{ord}(\eta^{-8},\infty) = -\frac{1}{3} \quad \text{und} \quad \operatorname{ord}(\eta^{-12},\infty) = -\frac{1}{2}$$

ab und erhält

$$\operatorname{ord}(J_{\alpha,\beta},\infty) = -\frac{\alpha}{3}-\frac{\beta}{2}$$

sowie

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}(f_{r,a,b},\infty) &= \frac{4-2r}{24}-\frac{(2-a)}{3}-\frac{(1-b)}{2}\\ &= -\frac{r}{12}+\frac{a}{3}+\frac{b}{2}-1 = -\mu'-\kappa^+\end{aligned}$$

nach Korollar V.1.5 mit $\mu' = \dim SS({}_1\Gamma, r, v_{a,b})$.
Weiterhin gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}(J_{2-a,1-b},\rho) &= \frac{2-a}{3} \quad \text{und}\\ \operatorname{ord}(J_{2-a,1-b},i) &= \frac{1-b}{2}\end{aligned}$$

wegen Satz III.4.1 d).
Ist jetzt $F \in \mathbb{H}({}_1\Gamma, 2-r, v_{a,b}^{-1})$, so ist auch $F(\tau)\cdot f_{r,a,b}^{-1}(\tau)$ noch in $\mathbb{H}$ holomorph, denn diese Tatsache ist durch $\operatorname{ord}(F,\rho) \geq \frac{2-a}{3}$ und $\operatorname{ord}(F,i) \geq \frac{1-b}{2}$ nach III.3.1 gewährleistet.
Wegen III.4.1 e) handelt es sich folglich bei $F\cdot f_{r,a,b}^{-1}$ um ein Polynom in J_0 mit komplexen Koeffizienten, d.h. es existiert ein $P \in \mathbb{C}[X]$ mit

$$F(\tau) = f_{r,a,b}(\tau)P(J_0(\tau)),$$

und die Behauptung ist gezeigt. $\square$

Liegt zudem — wie für $r = \frac{5}{2}$ und $v = v_\eta$ — der Fall vor, daß es außer 0 keine Spitzenformen vom Gewicht $r = \frac{r_0}{2} > 2$ ($r_0 \in \mathbb{N}$) zur Modulgruppe und zum Multiplikatorsystem v gibt, so kann man mit Hilfe der Darstellung in 4.1 zeigen, daß sämtliche Fourierkoeffizienten $-\frac{1}{2}a_{r,n+\kappa^+}(v,-m-\kappa')$ ($n \geq 0, m \geq 0$) der POINCARÉschen Reihen $-\frac{1}{2}G_r(\tau, v, -m-\kappa') \in \mathbb{H}({}_1\Gamma, r, v)$ (darunter für $r = \frac{5}{2}$, $\kappa^+ = \frac{1}{24}$, $n = 0$ und $\kappa' = \frac{23}{24}$ die Partitionenanzahlen $p(m)$ ($m \geq 1$)) ganze Zahlen sind.

4.2 Satz

Es sei $r = \frac{r_0}{2} > 2$ mit $r_0 \in \mathbb{N}$, $v = v_{a,b}$ ein MS auf ${}_1\Gamma$ vom Gewicht r.
Ist $\mu' = \dim SS({}_1\Gamma, r, v_{a,b}) = 0$, und ist $\kappa' = 1 - \kappa^+$, so sind die Fourier-Koeffizienten

$$-\frac{1}{2}a_{r,n+\kappa^+}(v, -m-\kappa') \quad (n \geq 0)$$

der Modulformen

$$-\frac{1}{2}G_r(\tau, v, -m-\kappa') \in \mathbb{H}({}_1\Gamma, r, v) \quad (m \geq 0)$$

sämtlich ganze Zahlen.

<u>BEWEIS:</u>

Ist $r = \frac{r_0}{2} > 2$ mit einem $r_0 \in \mathbb{N}$, $\mu' = \dim SS({}_1\Gamma, r, v_{a,b}) = 0$, und definiert man Funktionen $f_k \in \mathbb{H}({}_1\Gamma, 2-r, v_{a,b}^{-1})$ durch

$$f_k(\tau) := f_{r,a,b}(\tau) J_0^k(\tau)$$

für $k \geq 0$, $\tau \in \mathbb{H}$, so gilt

$$\operatorname{ord}(f_k, \infty) = -\kappa^+ - k$$

nach den Ausführungen im Beweis der Proposition 4.1. An der Darstellung der Funktionen $f_{r,a,b}$ und J_0 in Proposition 4.1 liest man weiterhin ab, daß es sich bei den Fourierkoeffizienten der f_k um ganze Zahlen handelt, und daß ihre Fourierentwicklungen mit dem Term $e^{2\pi i(-\kappa^+-k)\tau}$ beginnen.
Man findet demnach ein System von Funktionen

$$D_{2-r,k}(\tau) \in \mathbb{H}({}_1\Gamma, 2-r, v^{-1}) \quad (k \geq 0)$$

mit

$$D_{2-r,k}(\tau) = e^{2\pi i(-\kappa^+-k)\tau} + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{2-r,m+\kappa'}(D_{2-r,k}) e^{2\pi i(m+\kappa')\tau}.$$

Diese lassen sich durch

$$D_{2-r,0} = f_0$$

und

$$D_{2-r,k} = f_k - \sum_{l=0}^{k-1} \alpha_l D_{2-r,l} \quad (*)$$

mit gewissen $\alpha_l \in \mathbb{Z}$ angeben.
Nach $(*)$ und den Eigenschaften der Funktionen f_k sind für alle $k \geq 0,\ m \geq 0$ die Koeffizienten $\alpha_{2-r,m+\kappa'}(D_{2-r,k})$ ganze Zahlen.
Wendet man dann Satz VI.2.5 a) auf die Funktionen $D_{2-r,k}(\tau)$ als Elemente von $\mathbb{H}({}_1\Gamma, 2-r, v_{a,b}^{-1})$ mit den Hauptteilen $e^{2\pi i(-\kappa^+ - k)\tau}$ im Unendlichen an, so erhält man

$$D_{2-r,k}(\tau) = -\frac{1}{2} F_{2-r}(\tau, v^{-1}, k+\kappa^+)$$

und

$$\alpha_{2-r,m+\kappa'}(D_{2-r,k}) = -\frac{1}{2} a_{r,k+\kappa^+}(v, -m-\kappa') \quad (k \geq 0, m \geq 0)$$

aus Satz VI.2.5 d), woraus folgt, daß sämtliche Fourier-Koeffizienten

$$-\frac{1}{2} a_{r,k+\kappa^+}(v, -m-\kappa') \quad (k \geq 0, m \geq 0)$$

ganzzahlig sind, was zu beweisen war. □

Schlußbemerkung

Um die Partitionenanzahl im Falle des klassischen Partitionenproblems zu berechnen, reichte es, den Hauptsatz über Modulformen von negativem Gewicht für diejenigen Modulformen zu beweisen, welche höchstens einfache Pole in der oberen Halbebene besitzen, und den Spezialfall, daß es sich bei der zu untersuchenden Form um eine auf $\mathbb{H}$ holomorphe Modulform von negativem Gewicht handelt, auf die Funktion η^{-1} anzuwenden.
Mit der Untersuchung der Formen mit Polen erster Ordnung in der oberen Halbebene sind jedoch die Möglichkeiten der Verallgemeinerung nicht ausgeschöpft. Auch den Modulformen mit Polen höherer Ordnung in $\mathbb{H}$ kommt im Rahmen der Partitionenprobleme eine arithmetische Bedeutung zu. (vgl. [12], S. 33-37)
Es macht hingegen etwas mehr Mühe, wenn man zulassen will, daß die gegebene Modulform von negativem Gewicht Pole beliebig hoher endlicher Ordnung in $\mathbb{H}$ besitzt. Petersson benutzte die partiellen Ableitungen der Funktionen $H_r(\tau, v, z)$ nach τ und z, um diese allgemeinere Form des Hauptsatzes VI.2.5 zu beweisen. (s. [13], S. 44ff.)
Auch sind nicht alle Formen, welche im Zusammenhang mit Partitionenproblemen zu untersuchen sind, von negativem Gewicht zur vollen Modulgruppe.
Die Tatsache, daß eine bestimmte Klasse von Partitionenproblemen auf Modulformen vom Gewicht 0 zu Kongruenzuntergruppen der Modulgruppe führt (s. [11], S. 7ff.), veranlaßte Petersson im Jahre 1954 dazu, seine Betrachtungen dahingehend auszudehnen.
Die dort beschriebenen Partitionenprobleme führen zwar sämtlich auf Modulformen, welche auf der oberen Halbebene holomorph sind, was eine Untersuchung von Singularitäten überflüssig machte, jedoch verlangte das Gewicht 0 eine methodisch etwas kompliziertere Vorgehensweise als in der vorliegenden Arbeit. (s. [11])

Literaturverzeichnis

[1] Apostol, T. M.: *Introduction to analytic number theory*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1976.

[2] ders.: *Modular functions and Dirichlet series in number theory*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1976, Second Edition 1990.

[3] Chandrasekharan, K.: *Arithmetical Functions*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1970.

[4] Dedekind, R.: *Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modul-Funktionen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 83 (1877), S. 265-292.

[5] Hardy, G. H., Ramanujan, S.: *Asymptotic formulae in combinatory analysis*, Proceedings of the London Mathematical Society, 17 (1918), S. 75-115.

[6] Knopp, M. I.: *Modular Functions in Analytic Number Theory*, Markham Publishing Company, Chicago 1970.

[7] Lehmer, D. H.: *On the Hardy-Ramanujan series for the partition function*, Journal of the London mathematical Society, 12 (1937), S. 171-176.

[8] Maass, H. *Lectures on Modular Functions of one complex Variable*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1983.

[9] Miyake, T.: *Modular forms*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1989.

[10] Ogg, A. P.: *Survey of modular functions of one variable*, Lecture Notes in Mathematics 320, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York 1973, S. 1-35.

[11] Petersson, H.: *Über Modulfunktionen und Partitionenprobleme*, Abhandlungen der deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Heft 2 (1954).

[12] ders.: *Über automorphe Orthogonalfunktionen und die Konstruktion der automorphen Formen von positiver reeller Dimension*, Mathematische Annalen 127 (1954), S. 33-81.

[13] ders.: *Konstruktion der Modulformen und der zu gewissen Grenzkreisgruppen gehörigen automorphen Formen von positiver reeller Dimension und die vollständige Bestimmung ihrer Fourierkoeffizienten*, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Heft 8 (1950).

[14] ders.: *Theorie der automorphen Formen beliebiger reeller Dimension und ihre Darstellung durch eine neue Art* Poincaré*scher Reihen*, Mathematische Annalen, Band 103 (1930), S.369-436.

[15] ders.: *Über den Bereich absoluter Konvergenz der Poincaréschen Reihen*, Acta Mathematica Stockholm, 80 (1948), 1-26.

[16] Rademacher, H.: *On the partition function $p(n)$*, Proceedings of the London Mathematical Society, 43 (1937), 241-254.

[17] ders.: *Bestimmung einer gewissen Einheitswurzel in der Theorie der Modulfunktionen*, Journal of the London mathematical Society, 7 (1932), S. 14-19.

[18] ders.: *On the expansion of the partition function in a series*, Annals of Mathematics, 44 (1943), S. 416-422.

[19] Rademacher, H.; Zuckerman, H. S.: *On the Fourier Coefficients of certain modular forms of positive dimension*, Annals of Mathematics, 39 (1938), 433-462.

[20] Rankin, R. A.: *Modular forms and functions*, Cambridge University Press, Cambridge 1977.

[21] Shimura, G.: *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Iwanami Publishers and Princeton University Press, Tokyo-Princeton 1971.

[22] Watson, G. N.: *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, zweite Auflage 1966.

[23] Zuckerman, H. S.: *On the expansions of certain modular forms of positive dimension*, American Journal of Mathematics, 62 (1940), 127-152.

Hiermit versichere ich, daß ich diese Arbeit selbständig verfaßt und keine anderen Hilfsmittel als die angegebenen benutzt habe. Alle Stellen, die den Ausführungen anderer Autoren wörtlich oder sinngemäß entnommen sind, habe ich durch Angabe der Quellen als solche kenntlich gemacht.

Münster, den 5. März 1997